ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1 Формула Ричардсона-Дэшмана

Явление термоэлектронной эмиссии состоит в преодолении электронами проводимости потенциального барьера у поверхности металла за счет кинетической энергии их теплового движения. Для описания этого явления необходимо привлечь законы статистической физики.

Статистическое распределение определяет количество электронов в единице объема металла, имеющих проекции скорости в интервалах между υ_x и $\upsilon_x + d\upsilon_x$, υ_y и $\upsilon_y + d\upsilon_y$, υ_z и $\upsilon_z + d\upsilon_z$ или, что то же самое, проекции импульса между p_x и $p_x + dp_x$, p_y и $p_y + dp_y$, p_z и $p_z + dp_z$. Энергия выделенных электронов лежит в некотором интервале между W и $W + dW$, определяемом зависимостями $W(\upsilon)$ или $W(p)$. Пусть dZ есть количество состояний в единице объема, соответствующих рассматриваемому интервалу проекций. Для малого интервала оно пропорционально этому интервалу по каждой из проекций:

$$dZ \sim dp_x\, dp_y\, dp_z \qquad (\text{П.1.1})$$

Тогда количество электронов, имеющих проекции импульса в указанных интервалах:

$$dn = dZ \qquad (\text{П.1.2})$$

где f—вероятность реализации этих состояний электронов.

В классической статистике Максвелла-Больцмана величина dZ ничем не ограничена (любое количество электронов может иметь проекцию импульса в заданном интервале). Для электронов в металле, однако, нужно учесть квантование проекций импульса. Согласно статистике dZ имеет вполне конечное значение:

$$dZ = 2\frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3} = \frac{2m^3}{h^3} d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z. \qquad (\text{П.1.3})$$

Здесь $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянная Планка, m - масса электрона.

Состояния электронов проводимости в металле описывает квантовая статистика Ферми-Дирака. Однако нас интересуют не все электроны, а лишь те из них, энергия которых W не меньше высоты потенциального барьера Φ: $W \geq \Phi$. Воспользуемся тем, что при таких достаточно больших энергиях распределение Ферми-Дирака согласно принципу соответствия переходит в классическое распределение Больцмана, для которого:

$$f = \exp(-W/kT) \qquad (\text{П.1.4})$$

При этом классическая энергия $W = (1/2)m\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2\right)$.

Но даже если электроны, обладают энергией, большей высоты потенциального барьера Ф, этого недостаточно для его преодоления. Необходимо также, чтобы электроны имели значительную проекцию скорости в направлении, перпендикулярном поверхности металла. С какой бы скоростью ни двигался электрон параллельно поверхности, он не покинет металл! Если расположить координатную ось x по нормали к поверхности в сторону вакуума, а оси y и z - вдоль поверхности, то условие вылета электрона из металла можно записать так:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_x^2 \geq \Phi .$$

Тогда минимальная скорость равна:

$$\upsilon_{x\,min} = (2\Phi/m)^{1/2}. \qquad (П.1.5)$$

При этом проекции υ_y и υ_z могут принимать любые значения от $-\infty$ до ∞.

Максимальный ток, ток насыщения, наблюдается при условии, что все электроны, пересекающие поверхность, увлекаются внешним полем и движутся к аноду, не возвращаясь обратно в металл. Электроны с концентрацией dn, определяемой (П.1.2), дают следующий вклад в плотность тока насыщения:

$$dj_s = d\rho_0 v_x = ev_x dn = \frac{2em^3}{h^3} v_x \exp\left[-\frac{m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)}{2kT}\right] dv_x dv_y dv_z ,$$

где $d\rho = edn$ - объемная плотность заряда, υ_x - скорость.

Полная плотность тока насыщения получается интегрированием этого выражения по всем возможным положительным значениям υ_x, начиная с $\upsilon_{x\,min}$ (П.1..5), и по всем возможным значениям υ_y и υ_z:

$$j_s = \frac{2em^3}{h^3} \int_{\upsilon_{x\,min}}^{\infty} \upsilon_x \exp\left(-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right) d\upsilon_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m\upsilon_y^2}{2kT}\right) d\upsilon_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m\upsilon_z^2}{2kT}\right) d\upsilon_z$$

Каждый из интегралов по υ_y и υ_z - табличный, это интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ax^2\right) dx = \sqrt{\pi/a} ,$$

и равен $(2\pi kT/m)^{1/2}$. Интеграл по υ_x вычисляется интегрированием по частям и равен $(kT/m)\exp(-\Phi/kT)$. Окончательно:

$$j_s = \frac{4\pi mek^2}{h^3} T^2 \exp(-\Phi/kT) = AT^2 \exp(-\Phi/kT), \qquad (П.1.6)$$

где постоянная A равна:

$$A = \frac{4\pi mek^2}{h^3} = 1{,}2 \cdot 10^6 \text{ А}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^2). \qquad (П.1.7)$$

Выражение (П.1.6) носит название формулы Ричардсона-Дэшмана.

П.2. Закон Богуславского-Ленгмюра

Рассмотрим для простоты случай плоского диода, в котором катод и анод представляют собой параллельные пластины, находящиеся на расстоянии d друг от друга. Ось x направим по нормали к пластинам от катода к аноду. Распределение потенциала $\varphi(x)$ между катодом и анодом при наличии там пространственного заряда с объемной плотностью $\rho(x)$ можно найти из решения уравнения Пуассона (см. формулу (10) раздела 1.2 "Объемный заряд"):

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{ne}{\varepsilon_0} \qquad (П.2.1)$$

где $n(x)$ и e - концентрация электронов и абсолютное значение заряда электрона.

Плотность тока через диод равна

$$j = ne\upsilon \qquad (П.2.2)$$

и, естественно, не зависит от x, хотя и концентрация $n(x)$, и скорость электронов $\upsilon(x)$ меняются вдоль оси x. Скорость электронов в любой точке промежутка катод - анод задана значением потенциала в той же точке, ибо (в пренебрежении начальной скоростью электронов) их кинетическая энергия равна работе сил поля:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = e\varphi. \qquad (П.2.3)$$

Исключая из этих трех уравнений концентрацию n и скорость υ, можно составить уравнение, описывающее распределение потенциала:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = a\varphi^{-1/2}; \qquad (П.2.4)$$

где введено обозначение коэффициента a:

$$a = j/\varepsilon_0\sqrt{2e/m}. \qquad (П.2.5)$$

Потенциалы будем отсчитывать от потенциала катода:

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \qquad (\text{П.2.6})$$

Это условие представляет собой первое граничное условие задачи. Чтобы сформулировать второе граничное условие, будем считать, что напряженность электрического поля E у поверхности катода также равна нулю. Если бы это было не так, то все электроны, испускаемые катодом, увлекались бы электрическим полем к аноду и термоэлектронный ток достигал бы насыщения при любых напряжениях на диоде. Учитывая, что $E = -d\varphi/dx$, второе граничное условие задачи получим в виде:

$$d\varphi/dx = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \qquad (\text{П.2.7})$$

Решение уравнения (7.13), удовлетворяющее сформированным граничным условиям:

$$\varphi = \alpha^{\beta}. \qquad (\text{П.2.8})$$

Постоянные α и β получим, подставляя (П.2.8) в (П.2.4). Это дает:

$$\alpha\beta(\beta - 1)x^{\beta-2} = a\alpha^{-1}x^{-\beta/2}. \qquad (\text{П.2.9})$$

Приравнивая показатели степени и коэффициенты при x в обеих частях равенства, находим:

$$\beta = 4/3,\ \alpha = (9a/4)^{2/3}.$$

Таким образом, распределение потенциала выражается формулой:

$$\varphi = (9a/4)^{2/3}x^{4/3} \qquad (\text{П.2.10})$$

При значении $x=d$ φ есть потенциал анода, который с учетом (П.2.6) равен напряжению на диоде U. Поэтому

$$U = (9a/4)^{2/3}d^{4/3}.$$

Подставляя в это выражение вместо коэффициента a его значение согласно (П.2.5) и решая получаемое уравнение относительно плотности тока j, находим окончательно:

$$j = CU^{3/2}, \qquad (\text{П.2.11})$$

где $$C = \frac{4}{9}\frac{\varepsilon_0}{d^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}.$$

Формулу (П.2.11) называют "законом трёх вторых" или законом Богуславского-Лэнгмюра. Он выполним для диодов с электродами различной формы. От формы зависит только выражение для коэффициента C. Для цилиндрических электродов вместо плотности тока j целесообразно ввести полный ток I, и тогда формула (П.2.11) принимает вид:

$$I=CU^{3/2}, \qquad (П.2.12)$$

где C — постоянная, определяемая формой и размерами диода.

На рис.П.2.1(правая ось) показано распределение потенциала между катодом и анодом плоского диода, полученное в соответствии с (П.2.10). Подставляя в (П.2.1), можем найти распределение концентрации электронов:

$$n=\frac{4\varepsilon_0}{9e}\frac{U}{d^{1/3}}x^{-2/3}. \qquad (П.2.13)$$

Кривая $n(x)$ также показана на рис.П.2.1. Как и следовало ожидать, концентрация электронов максимальна у катода. При $x \to 0$ $n \to \infty$ и решение теряет смысл. Этот недостаток теоретического результата является следствием пренебрежения тепловыми скоростями электронов, вылетающих с катода.

Проведем качественный анализ поправок, возникающих при учете начальной скорости электронов (рис.П.2.2).

Пусть анод изолирован, т.е. электрическая цепь разорвана. Вследствие начальной скорости электроны, покидающие катод, летят к аноду и заряжают его отрицательно. Этот процесс продолжается до тех пор, пока на аноде не установится некоторый потенциал U_1, а все вылетающие электроны не станут возвращаться на катод (кривая "а"). Если составить замкнутую цепь, накоротко соединив анод и катод проводником вне диода, то в этой цепи будет течь ток. При этом напряжение на диоде $U_2 = 0$, а распределение потенциала $\varphi(x)$ показывает кривая "б". На расстоянии x^* от катода образуется минимум потенциала, и формируется потенциальный барьер высоты $\Delta\varphi^*$ для термоэлектронов.

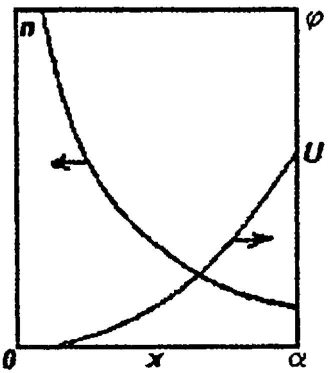

Рис.П.2.1. Изменение потенциала φ и концентрации электронов в пространстве между катодом ($x = 0$) и анодом ($x = d$) плоского диода

Если к аноду приложить небольшое положительное напряжение U_3, то минимум в распределении потенциала останется, но уменьшится и приблизится к катоду (x^* и $\Delta\varphi^*$ уменьшаются - кривая "в").

При достаточно большом анодном напряжении U_4 минимум потенциала смещается в область катода, потенциальный барьер исчезает и в работе диода происходит переход к режиму насыщения (кривая "г"). Дальнейшее повышение напряжения до U_5 увеличивает ток незначительно. Объемный заряд уменьшается и распределение потенциала (кривая "д") приближается к случаю, характерному для полного отсутствия объемного заряда (штриховая линия).

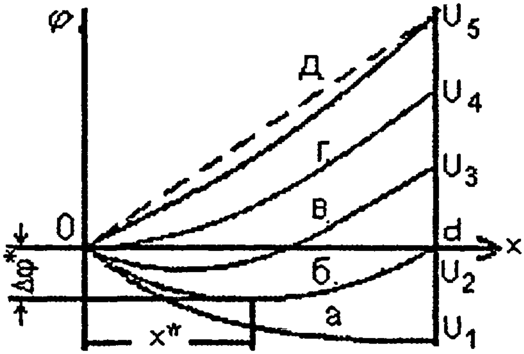

Рис.П.2.2. Возможные случаи изменения потенциала плоского диода с учетом начальной скорости электронов

Интервал анодных напряжений между U_1 и U_4, где объемный заряд существенно сказывается на распределении потенциала в диоде, называют областью или режимом пространственного (объемного) заряда.

При выполнении условия $U > U_4$ говорят, что диод работает в режиме насыщения.

Условие $U < U_1$ определяет область начального тока, где сравнительно большое электрическое поле, во-первых, заворачивает электроны обратно в катод, а, во-вторых, образует значительный потенциальный барьер, который могут преодолеть только электроны, обладающие большой кинетической энергией.