3.6. Линейный гармонический осциллятор.

3.6.1. Классический осциллятор.

Задача об осцилляторе одна из самых важных задач в механике, электромагнетизме и в квантовой механике. Сложное периодическое или колебательное движение можно свести к совокупности так называемых нормальных колебаний, эквивалентных колебаниям гармонического осциллятора (см главу 4 Колебания в курсе Механики).

Напомним рассмотрение осциллятора в классической механике. Упругая возвращающая сила равна $F = -kx$, при этом уравнение Ньютона имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx\,, \tag{3.6.1}$$

или иначе, уравнение, описывающее гармоническое колебательное движение (осциллятор):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \tag{3.6.2}$$

где частота колебаний $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Решение уравнения (3.6.2) имеет вид:

$$x = aCos\omega t\,. \tag{3.6.3}$$

Ранее в курсе электромагнетизма также получали интенсивность (мощность) излучения ускоренно движущегося заряда:

$$P(t) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{x}^2\,. \tag{3.6.4}$$

Средняя интенсивность излучения есть мощность излучения:

$$\langle P\rangle = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\langle(\ddot{x})^2\right\rangle = \frac{e^2 a^2\omega^4}{3c^3} \tag{3.6.5}$$

Энергия гармонического осциллятора равна:

$$E = T + U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{m\omega^2 a^2}{2} \tag{3.6.6}$$

Тогда мощность излучения пропорциональна энергии осциллятора

$$\langle P\rangle = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}E \tag{3.6.7}$$

В классической механике имеем следующие параметры, характеризующие колебательное движение: 1) интенсивность излучения, 2) частота излучения, 3) энергия осциллятора. При этом отметим, что энергия осциллятора может принимать произвольное значение.

3.6.2. Квантовый осциллятор.

Потенциальная энергия одномерного осциллятора, изображенная на рис. 6.1, записывается в виде $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Задачу о квантовом одномерном осцилляторе решим точно, разбив ее решение на отдельные этапы.

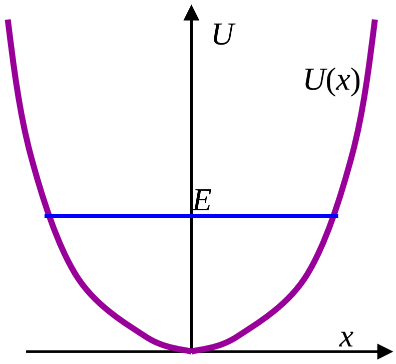


Рис. 6.1.

А) *Замена переменных*.

Уравнение Шредингера для одномерного осциллятора имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi(x) = E\psi(x) \tag{3.6.8}$$

Граничные условия состоят в том, что волновая функция убывает на больших расстояниях:

$$\psi(\pm\infty) = 0\,. \tag{3.6.9}$$

Из качественных представлений получаем, что в области $E > U$ решение должно быть типа плоских волн, но искаженное зависимостью потенциала от координаты, а в области $E < U$ – затухающие решения. Перепишем уравнение (3.6.8) в виде:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi = 0 \qquad (3.6.10)$$

Введем новые обозначения: введем константу λ

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} \qquad (3.6.11)$$

и переменную ξ

$$\xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \qquad \text{или} \qquad x^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\xi^2 . \qquad (3.6.12)$$

Вычисляя производные

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\psi'_\xi , \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{m\omega}{\hbar}\psi''_\xi , \qquad (3.6.13)$$

подставляем их в (3.6.10). Сокращая, имеем следующее уравнение:

$$\psi''_\xi + \left(\lambda - \xi^2\right)\psi = 0 \qquad (3.6.14)$$

Будем исследовать и решать это уравнение.

Б) *Асимптотическое решение уравнения*.

Рассмотрим асимптотические решения при $\xi \to \pm\infty$. Тогда уравнение приобретает вид:

$$\psi''_\infty - \xi^2\psi_\infty = 0 \qquad (3.6.15)$$

Ищем решение в виде:

$$\psi_\infty = exp\left(\gamma\xi^2\right), \qquad (3.6.16)$$

где γ – постоянная. При этом вторая производная равна

$$\psi''_\infty = 2\gamma\left(2\gamma\xi^2 + 1\right)exp\left(\gamma\xi^2\right).$$

Здесь еще раз воспользуемся тем, что $\xi \to \pm\infty$, тогда вторая производная равна:

$$\psi''_\infty \approx 4\gamma^2\xi^2\, exp\left(\gamma\xi^2\right) . \qquad (3.6.17)$$

Подставляем (3.6.17) в уравнение (3.6.15):

$$4\gamma^2\xi^2\, exp\left(\gamma\xi^2\right) - \xi^2\, exp\left(\gamma\xi^2\right) = 0$$

Откуда получаем параметр γ:

$$\gamma = \pm\frac{1}{2} \qquad (3.6.18)$$

Тогда асимптотическое решение уравнения имеет вид линейной комбинации двух решений, соответствующих двум значениям параметра γ:

$$\psi_\infty(\xi) = C_1\, exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) + C_2\, exp\left(\frac{\xi^2}{2}\right)$$

Исходя из граничных условий (3.6.9): при $\xi \to \pm\infty$ должно быть $\psi \to 0$, тогда получаем $C_2 = 0$. Итак, решение на бесконечности (коэффициент перед экспонентой не существенен) имеет вид затухающей экспоненты:

$$\psi_\infty(\xi) = exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \qquad (3.6.19)$$

В) *Выделение асимптотического решения из общего решения*.

Ищем решение в виде произведения:

$$\psi = \psi_\infty(\xi)\cdot u(\xi) = exp\left(-\xi^2/2\right)\cdot u(\xi) \qquad (3.6.20)$$

Снова считаем вторую производную:

$$\psi''_{\xi}=\left(-\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}u(\xi)+e^{-\frac{\xi^2}{2}}u'(\xi)\right)'_{\xi}=e^{-\frac{\xi^2}{2}}\left[-u(\xi)-\xi u'(\xi)+\xi^2u(\xi)-\xi u'(\xi)+u''(\xi)\right]=$$
$$=e^{-\frac{\xi^2}{2}}\left[u''-2\xi u'+\left(\xi^2-1\right)u\right] \qquad (3.6.21)$$

Подставляя в уравнение (3.6.14) получаем уравнение для $u(\xi)$:

$$u''-2\xi u'+(\lambda-1)u=0 \qquad (3.6.22)$$

Г). *Решение в виде ряда*.

Решение уравнения (3.6.22) ищем в виде ряда по степеням ξ:

$$u(\xi)=b_\nu\xi^\nu+b_{\nu+1}\xi^{\nu+1}+b_{\nu+2}\xi^{\nu+2}+...=\sum_{k=\nu}^{\infty}b_k\xi^k \qquad (3.6.23)$$

Начальную степень ν определим из условия, чтобы $u(\xi)$ нигде в бесконечность не обращалась. Подставим (3.6.23) в (3.6.22), предварительно сосчитав производные:

$$u'(\xi)=\sum_{k=\nu}^{\infty}kb_k\xi^{k-1}$$

$$u''(\xi)=\sum_{k=\nu}^{\infty}k(k-1)b_k\xi^{k-2}$$

Тогда получаем:

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}k(k-1)b_k\xi^{k-2}-2\xi\sum_{k=\nu}^{\infty}kb_k\xi^{k-1}+(\lambda-1)\sum_{k=\nu}^{\infty}b_k\xi^k=0$$

или

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}\left[k(k-1)b_k\xi^{k-2}-2kb_k\xi^k+(\lambda-1)b_k\xi^k\right]=0 \qquad (3.6.24)$$

Приравнивая нулю слагаемые с одинаковыми степенями ξ – ξ^k, получаем:

при $k=\nu$ $\quad \nu(\nu-1)b_\nu\xi^{\nu-2}=0$, откуда получаем: $\nu=0$ или $\nu=1$.

при $k=\nu+1$ $\quad (\nu+1)\nu b_{\nu+1}\xi^{\nu-1}=0$, откуда получаем $\nu=0$, что не дает ничего нового, или $\nu=-1$.

Однако начало ряда со степени $\nu=-1$ не годится, поскольку слагаемое ξ^{-1} расходится при стремлении ξ к нулю $\xi\to 0$.

В общем случае из равенства коэффициентов при одинаковых степенях ξ^k имеем:

$$(k+2)(k+1)b_{k+2}\xi^{k-2+2}+(\lambda-1-2k)b_k\xi^k=0$$

и получаем рекуррентное соотношение:

$$b_{k+2}=\frac{2k+1-\lambda}{(k+2)(k+1)}b_k \qquad (3.6.25)$$

Общее рекуррентное соотношение позволяет вычислить коэффициенты ряда через единицу. Ряды могут начинаться с $\nu=0$ (четные степени ξ) или с $\nu=1$ (нечетные степени ξ). Итак, имеем в решении (3.6.22) два ряда:

$$\begin{cases}u_1=b_0+b_2\xi^2+b_4\xi^4+b_6\xi^6+...\\ u_2=b_1\xi^1+b_3\xi^3+b_5\xi^5+b_7\xi^7...\end{cases}, \qquad (3.6.26)$$

в которых коэффициенты связаны рекуррентными соотношениями (3.6.25).

Д). *Исследование рядов*.

Оказывается, что ряды (3.6.26) расходятся. В самом деле, исследуем их поведение при $\xi\to\infty$. Вначале рассмотрим ряд, который определенно расходится при $\xi\to\infty$:

$$e^{\xi^2} = 1 + \frac{\xi^2}{1!} + \frac{\xi^4}{2!} + \frac{\xi^6}{3!} + \ldots + \frac{\xi^\tau}{\left(\frac{\tau}{2}\right)!} + \frac{\xi^{\tau+2}}{\left(\frac{\tau+2}{2}\right)!} + \ldots \qquad (3.6.27)$$

Возьмем отношение коэффициентов при высоких членах ряда $\tau >> 1$:

$$\frac{a_{\tau+2}}{a_\tau} = \frac{\left(\tau/2\right)!}{\left(\frac{\tau+2}{2}\right)!} = \frac{1}{\frac{\tau}{2}+1} \approx \frac{2}{\tau} \qquad (3.6.28)$$

Возьмем также отношение коэффициентов из рекуррентной формулы (3.6.25):

$$\frac{b_{k+2}}{b_k} = \frac{2k+1-\lambda}{(k+2)(k+1)} \approx \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{k} \qquad (3.6.29)$$

Из сравнения поведения коэффициентов получаем, что отличие нашего ряда (3.6.26) от ряда (3.6.27) может быть только в постоянном множителе, или, иначе, имеем:

$$u(\xi) \Rightarrow exp\left(\xi^2\right) \to \infty$$

$$при \ \ \xi \to \infty$$

Е). *Граничные условия и квантование энергии*.

Итак, ряд (3.6.26) расходится, как $exp\left(\xi^2\right)$, а общее решение $\psi(\xi)$, следовательно, расходится как $exp\left(\xi^2/2\right)$, что следует из формулы (3.6.20). Такое решение не удовлетворяет очевидным граничным условиям (3.6.9).

Означает ли это, что решений вообще нет? Нет! Решение существует, если ряд (3.6.26) оборвать и сделать конечным. Оборвать ряд u можно с помощью выбора параметра λ (3.6.11). Оборвать ряд – это означает приравнять коэффициент b_{k+2} в соотношении (3.6.25) нулю: $b_{k+2} = 0$, откуда получаем условие:

$$2k + 1 - \lambda = 0$$

И поскольку k есть порядковый номер членов ряда, то это есть целое число и тогда λ также целое число. Для параметра λ можно записать выражение:

$$\lambda = 2n + 1, \qquad \text{где } n = 0,1,2,3,\ldots \qquad (3.6.30)$$

Вспоминая выражение для параметра λ (3.6.11), получаем разрешенные уровни энергии E_n из условия $E = \frac{\lambda}{2}\hbar\omega$:

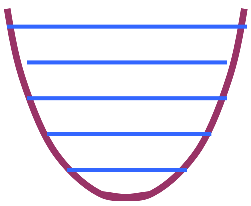


Рис. 6.2.

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (3.6.31)$$

где $n = 0,1,2,3,\ldots$

Итак, получаем спектр энергий одномерного осциллятора, – энергия квантуется, и уровни энергии находятся на одинаковом расстоянии друг от друга – *эквидистантный спектр* (см рис. 6.2). Расстояние между уровнями равно энергии кванта $\hbar\omega$. Низший уровень энергии отличен от нуля и составляет половину энергии кванта $\hbar\omega$.

Ж). *Волновые функции*.

Получающиеся конечные ряды $u(\xi)$ называются *полиномами Эрмита* и обозначаются $H_n(\xi)$. Для нескольких значений n имеем:

$$n = 0 \qquad H_0(\xi) = 1$$

$$n = 1 \qquad H_1(\xi) = 2\xi$$

$$n = 2 \qquad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$

$$n = 3 \qquad H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$

и так далее. Коэффициенты в полиномах Эрмита для удобства выбраны так, что максимальный коэффициент равен $b_n = 2^n$. Все остальные коэффициенты b_k в ряду тогда определяются рекуррентной формулой (3.6.25), в которой $\lambda = 2n+1$:

$$b_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k-4-2n} b_k = -\frac{k(k-1)}{2(n-k+2)} b_k \qquad (3.6.32)$$

Уравнение, которому подчиняются полиномы Эрмита, является частным случаем уравнения (3.6.22):

$$H_n'' - 2\xi H_n' + 2nH_n = 0 \qquad (3.6.33)$$

Решение представляется:

$$H_n(\xi) = (2\xi)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2\xi)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2\xi)^{n-4} + \ldots + \begin{cases} b_1\xi & n - четное \\ b_0 & n - нечетное \end{cases} \qquad (3.6.34)$$

Можно привести замкнутую формулу для получения полиномов Эрмита:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \qquad (3.6.35)$$

Итак, полное решение уравнения Шредингера для одномерного осциллятора имеет вид:

$$\psi_n(\xi) = C_n \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \cdot H_n(\xi), \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \qquad (3.6.36)$$

Коэффициенты C_n находят из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(\xi)|^2 d\xi = 1$$

Вычисляя соответствующие интегралы (см ниже Приложение 1), получаем:

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}}}} \qquad (3.6.37)$$

Запишем волновые функции низших состояний:

$$\psi_0(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

$$\psi_1(\xi) = \left(\frac{m\omega}{4\pi\hbar}\right)^{1/4} 2\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) = \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/4}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4} \cdot x \cdot \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

$$\psi_2(\xi) = \left(\frac{m\omega}{4\pi\hbar}\right)^{1/4} (2\xi^2 - 1) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

$$\psi_3(\xi) = \left(\frac{m\omega}{9\pi\hbar}\right)^{1/4} \xi(2\xi^2 - 1) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

Эти волновые функции ψ_n (сплошные линии) и соответствующие плотности вероятностей $|\psi_n|^2$ (красный пунктир) изображены на рисунке 6.3.

Из решения видно, что имеются четные и нечетные состояния. Внутри области $E > U$ имеем осцилляционное поведение волновых функций, напоминающее поведение свободной частицы, но, очевидно, искаженное изменяющейся с координатой x потенциальной энергией. Отметим, что с ростом энергии волновые функции и плотности вероятности имеют большое число осцилляций внутри “классически разрешенной” области. Причем возрастает амплитуда и вероятность нахождения частицы у границы потенциала. Это не удивительно, так как с ростом номера уровня распределение плотности вероятности приближается к классическому распределению вероятности нахождения частицы внутри такой ямы (см рис. 6.4).

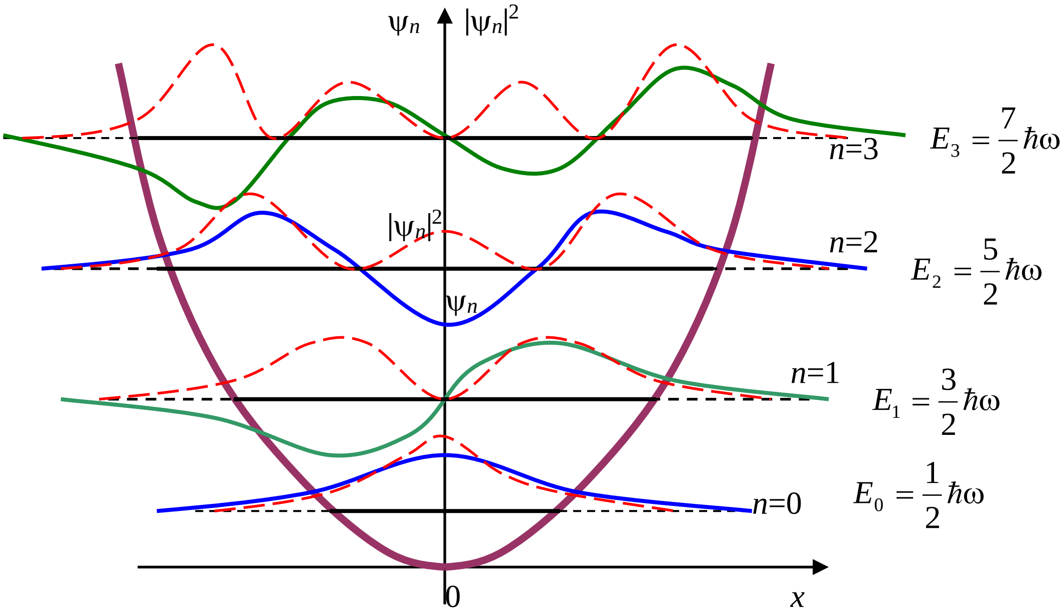
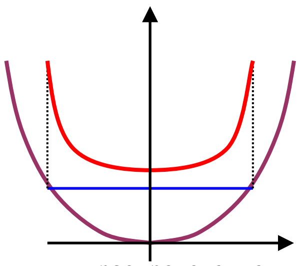


Рис. 6.3.

В квантовой механике для осциллятора возможны переходы частицы между соседними уровнями с излучением света частоты ω или, что то же, фотона энергии $\hbar\omega$. На первый взгляд в квантовом осцилляторе возможно излучение со всеми частотами кратными ω: $N\omega$, где N целое число. В старой квантовой теории Н.Бор вводил *правила отбора*: $\Delta n = \pm 1$, т.е. переход с излучением происходит только с соседних уровней. Эти правила отбора в квантовой механике получаются при вычислении вероятности перехода осциллятора с одного уровня на другой с излучением или поглощением фотона:

$$\Delta n = \pm 1$$
$$E_{фотон} = \hbar\omega \qquad (3.6.38)$$

Таким образом, квантовый осциллятор, определяемый потенциальной энергией $U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$, излучает фотоны с определенной энергией $\hbar\omega$.



распределение вероятности для классической частицы

Рис. 6.4.

Примечание 1. Иногда удобно ввести параметр длины $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, и тогда волновые функции имеют вид:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} x_0}} exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right) H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Приложение 1. Нормировка волновых функций одномерного осциллятора. Нормировку проще получить, используя замену (3.6.12):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(\xi)| d\xi = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} C_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi = 1$$

Подставим в интеграл выражение для одного из полиномов Эрмита из замкнутой формулы (3.6.35):

$$(-1)^n \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} C_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} e^{\xi^2} H_n(\xi) \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} d\xi = (-1)^n \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} C_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} d\xi = 1$$

Интеграл можно взять n раз по частям, при этом все свободные члены обращаются в нуль на бесконечности из-за убывания волновой функции. Тогда имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi)\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}d\xi = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}H_n(\xi)d\xi$$

Воспользуемся выражением для полинома Эрмита в виде ряда (3.6.34), и тогда видно, что в результате дифференцирования получаем:

$$\frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} = 2^n n!$$

Тогда под интегралом остается только экспоненциальная функция, и интеграл представляет собой известный табличный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\xi^2)d\xi = \sqrt{\pi}$$

Подставляя все в нормировочный интеграл, получаем:

$$(-1)^n(-1)^n\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} C_n^2 2^n n!\sqrt{\pi} = 1$$

Окончательно находим нормировочный множитель:

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}}}}$$

Примечание 2. Аналогично можно показать, что волновые функции с разными n ортогональны:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m^*(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn}$$

3.6.3. Операторный подход к задаче о квантовом осцилляторе.

Итак, решаем уравнение Шредингера (3.6.8), которое запишем через оператор импульса $\hat{p}_x \equiv \hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$:

$$\hat{H}\psi \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi(x) + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi(x) = E\psi(x)$$

Введем операторы

$$\hat{a} = \frac{\hat{p} - im\omega x}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \qquad (3.6.39)$$

и

$$\hat{a}^+ = \frac{\hat{p} + im\omega x}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \qquad (3.6.40)$$

Найдем последовательное действие этих операторов на функции:

$$\hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - \frac{i\omega}{2}[\hat{p}x - x\hat{p}]\right) = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \qquad (3.6.41)$$

Аналогично получаем:

$$\hat{a}\hat{a}^+ = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \qquad (3.6.42)$$

Тогда гамильтониан осциллятора можно записать:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{3.6.43}$$

Сосчитаем коммутатор операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^{+}$

$$\left[\hat{a}\hat{a}^{+}\right] = \hat{a}\hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{a} = 1 \tag{3.6.44}$$

Физический смысл операторов: $\hat{a}$ – оператор уничтожения, $\hat{a}^{+}$ – оператор рождения. В самом деле, действие операторов на волновые функции, являющиеся собственными функциями гамильтониана:

$$\hat{H}\psi_E = E\psi_E \tag{3.6.45}$$

приводит к новым собственным функциям гамильтониана с собственными значениями меньшими или большими на энергию $\hbar\omega$

$$\hat{a}\psi_E \Rightarrow \psi_{E-\hbar\omega}$$

$$\hat{a}^{+}\psi_E \Rightarrow \psi_{E+\hbar\omega}$$

Проверим это

$$\hat{H}\hat{a}\psi_E = \left(\hbar\omega\,\hat{a}\hat{a}^{+} - \frac{\hbar\omega}{2}\right)\hat{a}\psi_E = \hat{a}\left(\hbar\omega\,\hat{a}^{+}\hat{a} - \frac{\hbar\omega}{2}\right)\psi_E = \hat{a}\left(\hat{H} - \hbar\omega\right)\psi_E = \left(E - \hbar\omega\right)\hat{a}\psi_E = \left(E - \hbar\omega\right)\psi_{E-\hbar\omega}$$

Аналогично получаем:

$$\hat{H}\hat{a}^{+}\psi_E = \left(E + \hbar\omega\right)\hat{a}^{+}\psi_E = \left(E + \hbar\omega\right)\psi_{E+\hbar\omega} \tag{3.6.46}$$

Рассмотрим основное состояние, т.е. состояние с наименьшей энергией E_0, описываемое волновой функцией ψ_0. Тогда действие оператора уничтожения на нее равно нулю (нет состояния с меньшей энергией):

$$\hat{a}\psi_0 = 0 \tag{3.6.47}$$

Или

$$\hat{a}^{+}\hat{a}\psi_0 = \left(\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)\psi_0 = 0$$

Откуда получаем:

$$\hat{H}\psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0 \tag{3.6.48}$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{3.6.49}$$

А последующие уровни получаются действием операторов рождения на функцию ψ_0. Получаем спектр энергий (3.6.31)

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Волновая функция основного состояния находится из уравнения

$$-i\hbar\frac{d}{dx}\psi_0 - im\omega x\psi_0 = 0$$

$$\psi_0 = A\,exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

Волновые функции следующих по энергии состояний определяются действием операторов рождения на волновую функцию основного состояния.