3.8. Момент импульса в квантовой механике

3.8.1. Оператор момента импульса.

Ранее (см §3.1) мы записывали оператор импульса: $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$. В классической механике момент импульса материальной точки относительно начала отсчета определяется:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] \tag{3.8.1}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы, а $\vec{p}$ – ее импульс. Аналогично этому определению вводится оператор момента импульса в квантовой механике:

$$\hat{\vec{L}} = \left[\vec{r}, \hat{\vec{p}}\right] = -i\hbar\left[\vec{r}, \hat{\nabla}\right] \tag{3.8.2}$$

Это векторный оператор, поэтому его можно представить как сумму операторов проекций:

$$\hat{\vec{L}} = \hat{L}_x \vec{e}_x + \hat{L}_y \vec{e}_y + \hat{L}_z \vec{e}_z, \tag{3.8.3}$$

где операторы проекций момента импульса определяются:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \hat{L}_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \hat{L}_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{3.8.4}$$

Легко получить коммутатор для двух проекций момента импульса:

$$\begin{aligned} \left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] &= -\hbar^2\left\{\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\} = \\ &= -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\hbar\left[-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] = i\hbar\hat{L}_z \end{aligned} \tag{3.8.5}$$

Т.е. для всех проекций получаем:

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = i\hbar\hat{L}_z, \quad \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] = i\hbar\hat{L}_x, \quad \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] = i\hbar\hat{L}_y \tag{3.8.6}$$

Коммутаторы проекций отличны от нуля, т.е. любые 2 проекции момента импульса не могут быть одновременно измеримы. Отсюда следует важный вывод: *Две любые проекции момента импульса не могут одновременно иметь определенные значения*. Следовательно, и сам *вектор момента импульса* $\vec{L}$ *не имеет определенного направления в пространстве*.

В классической механике при движении частицы в центральном поле помимо энергии сохранялись вектор момента импульса и соответственно его проекция, что говорило о плоской траектории частицы.

В квантовой механике в центральном поле векторная величина момента импульса, оказывается, не может иметь определенное значение. *Определенное значение имеют одновременно абсолютная величина момента импульса (квадрат момента импульса сохраняется) и одна из его проекций*.

3.8.2. Оператор проекции момента импульса (МИ).

Поскольку нас будет интересовать приложение теории МИ к движению частицы в центральном поле, то удобнее представлять его в сферической системе координат (r, θ, φ):

$$x = rSin\theta Cos\varphi, \quad y = rSin\theta Sin\varphi, \quad z = rCos\theta \tag{3.8.7}$$

Пусть меняется только одна координата – угол φ, и найдем производную от функции ψ по координате φ (т.е. осуществляется вращение вокруг оси z):

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial x}(-rSin\theta Sin\varphi) + \frac{\partial\psi}{\partial y}rSin\theta Cos\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot 0 = \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi$$

Тогда помножая последнее равенство на множитель “$-i\hbar$“, имеем:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}=-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=\hat{L}_z \tag{3.8.8}$$

Итак, в сферической системе координат оператор проекции МИ на ось z определяется соотношением:

$$\hat{L}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{3.8.9}$$

В принципе ось z – произвольная, т.к. нет выделенного направления в центральном поле, если нет каких-то внешних условий.

Решим уравнение на собственные значения и собственные функции оператора проекции момента импульса:

$$\hat{L}_z\psi=L_z\psi$$

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=L_z\psi \tag{3.8.10}$$

или

$$\frac{\partial\psi}{\psi}=\frac{i}{\hbar}L_z\partial\varphi$$

Решением уравнения (3.8.10) является осциллирующая экспонента:

$$\psi_m=A\cdot exp\left(\frac{i}{\hbar}L_z\varphi\right) \tag{3.8.11}$$

Условие однозначности решения означает, что функция должна остаться той же при повороте на целое число оборотов (2π – полный оборот), в частности на 2π,т.е.

$$\psi_m(\varphi)=\psi_m(\varphi+2\pi) \tag{3.8.12}$$

Тогда подставляя (3.8.11), имеем:

$$Ae^{\frac{i}{\hbar}L_z\varphi}=Ae^{\frac{i}{\hbar}L_z\varphi}e^{\frac{i}{\hbar}L_z2\pi}\quad\text{и}\quad e^{\frac{i}{\hbar}2\pi L_z}=1$$

и получаем условие на собственные значения L_z

$$L_z=m\hbar,\qquad m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \tag{3.8.13}$$

Число m определяет проекцию момента импульса частицы L_z и называется *магнитным квантовым числом*. Подставляя (3.8.13) в (3.8.11), имеем собственную функцию оператора проекции момента импульса

$$\psi_m(\varphi)=Ae^{im\varphi} \tag{3.8.14}$$

Коэффициент A определяем из нормировки собственной функции:

$$\int_0^{2\pi}\psi_m^*\psi_m d\varphi=A^2\int_0^{2\pi}e^{-im\varphi}e^{im\varphi}d\varphi=2\pi A^2=1$$

Откуда получаем нормировочный множитель:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.8.14}$$

Легко видеть, что выполняется условие ортонормированности:

$$\int_0^{2\pi}\psi_{m'}^*\psi_m d\varphi=\delta_{m'm} \tag{3.8.15}$$

Окончательно получаем *собственные функции и собственные значения оператора проекции МИ*:

$$\psi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(im\varphi) \tag{3.8.16}$$

$$\hat{L}_z\psi_m=m\hbar\psi_m \tag{3.8.17}$$

Итак, проекция МИ на выделенное направление *квантована*, т.е. проекция МИ может принимать только значения кратные $\hbar$. Хотя направление оси z произвольно, но после выбора z – направления проекции L_z квантуются и принимают определенные дискретные значения, а другие проекции остаются *неопределенными*.