

Лабораторная работа В1.09

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛ

Цель работы

Определение моментов инерции тел различной формы и размеров методом крутильных колебаний.

Задачи

1. Измерить период колебаний крутильного маятника для различных положений грузов.
2. Повторить измерения для маятника с установленными на него исследуемыми телами.
3. Определить моменты инерции исследуемых тела и сравнить их с расчетными.

Введение

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси описывается основным законом динамики вращательного движения

$$I \frac{d\omega}{dt} = M, \quad (1)$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения, M – момент действующих на него сил относительно той же оси и $\frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение.

Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси можно найти суммированием моментов инерции его малых частей:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV.$$

Здесь ρ – плотность тела, а $dm = \rho dV$ – масса малого элемента тела объемом dV ,

отстоящего от оси вращения на расстоянии r . Момент инерции тела зависит от плотности, формы и размеров тела, а также от положения тела относительно оси вращения.

В лабораторной установке вращение тела происходит под действием спиральной пружины.



Рис. 1. Спиральная пружина

При повороте тела вокруг оси пружина деформируется и возникает момент сил упругости M , стремящийся вернуть тело в положение равновесия. В первом приближении можно считать, что этот момент пропорционален углу поворота φ .

$$M = -f \cdot \varphi, \quad (2)$$

где f – постоянная величина для данной спиральной пружины, называемая угловой жесткостью. Угловая жесткость зависит от материала и формы пружины.

С учетом (2) уравнение вращательного движения (1) переходит в

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -f \cdot \varphi. \quad (3)$$

Уравнение (3) является уравнением гармонических колебаний, его решение $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \theta)$ описывает гармонические крутильные колебания с частотой

$\omega = \sqrt{\frac{f}{I}}$ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно использовать как для измерения угловой жесткости пружины f , так и для определения момента инерции I . Для этого на ось пружины устанавливается горизонтальная штанга с двумя грузами, которые могут перемещаться вдоль нее. В лабораторной работе грузы располагаются на одинаковом расстоянии от оси вращения r .

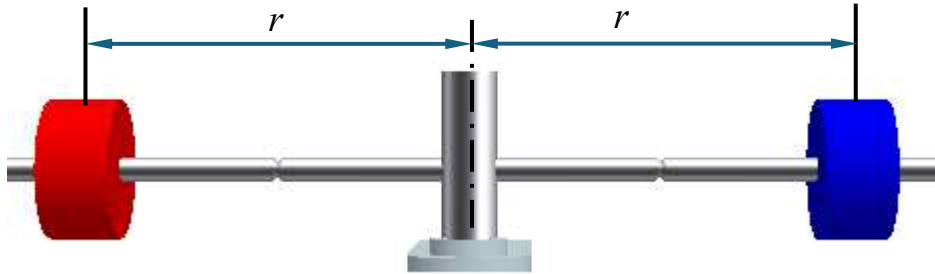


Рис. 2. Штанга с грузами

Момент инерции такой системы равен сумме моментов инерции маятника без грузов I_M и моментов инерции грузов I_1 и I_2 относительно оси вращения.

Моменты инерции грузов могут быть вычислены по теореме Штейнера

$$I_1 = I_2 = mr^2 + I_C,$$

где l – расстояние от центра груза до оси вращения, m – масса груза, а I_C – его момент инерции относительно центральной оси. Таким образом, полный момент инерции крутильного маятника равен

$$I = 2mr^2 + 2I_C + I_M = 2mr^2 + I_0. \quad (5)$$

При установке на маятник исследуемого k -тела момент инерции системы увеличивается на величину момента инерции этого тела I_k

$$I = 2mr^2 + I_0 + I_k.$$

Возводя уравнение для периода (4) в квадрат и подставляя в него выражение для момента инерции (5), получаем

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{f} I = \frac{4\pi^2}{f} (2mr^2 + I_0 + I_k) = a(2mr^2 + I_0 + I_k).$$

Таким образом, оказывается, что квадрат периода T^2 и $2mr^2$ связаны линейной зависимостью, угловой коэффициент которой $a = \frac{4\pi^2}{f}$. Проведя измерения периода крутильных колебаний для различных положений грузов, можно определить a , найти значения I_0 , I_k и угловую жесткость пружины

$$f = \frac{4\pi^2}{a}. \quad (6)$$

Экспериментальная установка

Общий вид экспериментальной установки показан на рисунке 3.

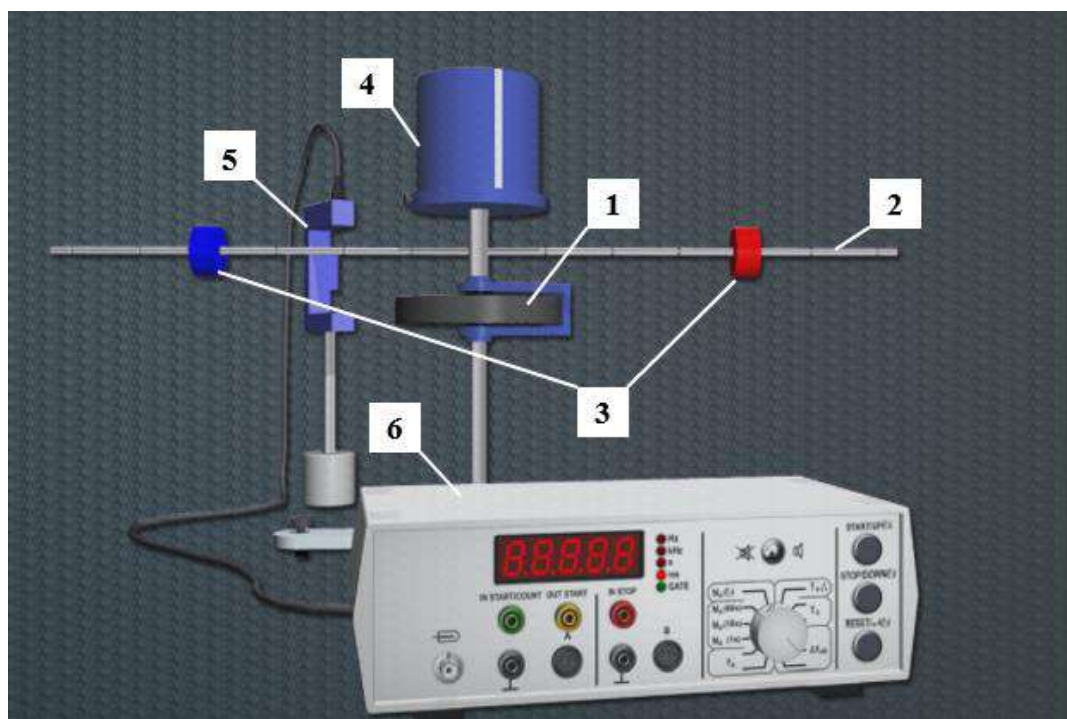


Рис. 3. Общий вид экспериментальной установки. 1 – фотоэлектрический датчик, 2 – исследуемое тело, 3 – спиральная пружина, 4 – штанга, 5 – цифровой секундомер, 6 – грузы

На неподвижном кронштейне закреплены спиральная пружина 1, штанга 2 с грузами 3, которые могут перемещаться по штанге. Сверху на кронштейн устанавливается исследуемое тело 4 (шар, плоский и объемный диски, полый и сплошной цилиндры). При отклонении системы из положения равновесия в пружине возникает момент силы упругости, возвращающий штангу с исследуемым телом в исходное положение, начинаются крутильные колебания. Прохождение штанги через положение равновесия фиксирует фотоэлектрический датчик 5, сигнал с которого передается на цифровой секундомер 6, измеряющий период колебаний.

Конструкция установки позволяет менять положение и массу грузов 3, массу штанги, а также параметры и положение исследуемых тел.

Предусмотрено два **варианта** выполнения измерений.

I. Измерение моментов инерции диска и/или шара, устанавливаемых непосредственно на маятник (Рис. 4).

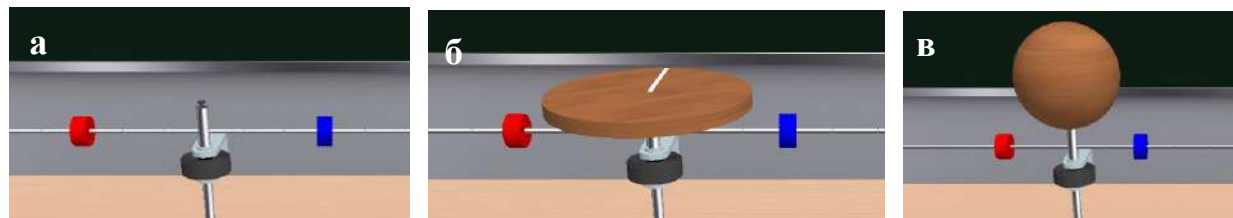


Рис. 4. Маятник без тела (а), с установленным диском (б) и шаром (в)

II. Измерение моментов инерции сплошного и/или полого цилиндра (трубы), устанавливаемых на маятник с опорой (Рис. 5).

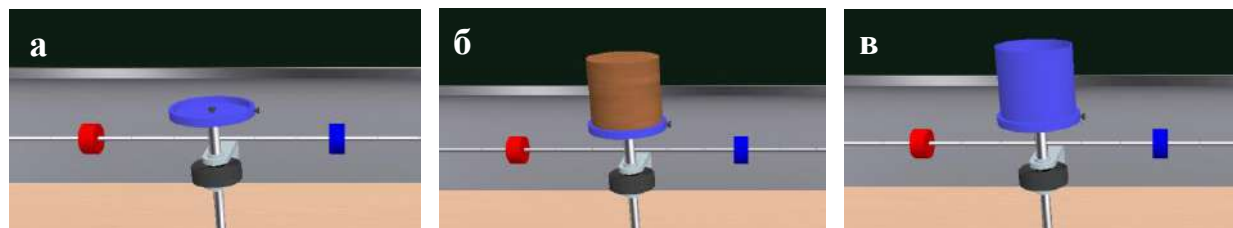


Рис. 5. Маятник с опорой (а), со сплошным (б) и полым цилиндром (в) на ней

В качестве дополнительных заданий могут быть выполнены непосредственное измерение жесткости пружины с помощью динамометра (Рис. 6а) и проверка теоремы Штейнера-Гюйгенса измерением момента инерции диска со смещением относительно оси вращения центром (Рис. 6 б,в).

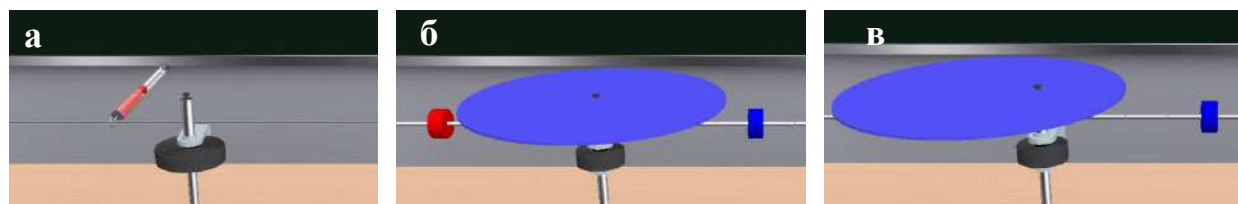


Рис. 5. Опыт по измерению жесткости пружины динамометром (а); маятник с диском, установленным по центру (б) и со смещением (в)

Порядок проведения эксперимента

1. Получите от преподавателя задание на выполняемые измерения и значения параметров. Запишите полученные указания и значения в протокол.
2. Запустите программу виртуальной лабораторной работы «Моменты инерции различных тел». Нажмите кнопку «Начать эксперимент».
3. Выполните измерения зависимости периода колебаний маятника T от плеча¹ грузов r для трех конфигураций установки из указанного варианта.
3.1. В панели параметров (рис. 6) введите заданные преподавателем значения масс груза и штанги, одинаковые для всех экспериментов.

Внимание! В каждом новом эксперименте панель открывается со стандартными значениями этих параметров (260 и 135 г соответственно). Не забывайте устанавливать заданные преподавателем значения!

¹ Термин «плечо» обычно применяется к силам – это кратчайшее расстояние до линии действия силы. В данной работе «плечо» служит удобным эквивалентом фразы «расстояние от оси вращения до места расположения груза» Оба значения можно примирить, если считать, что речь идет о силах, с которыми грузы давят на штангу.

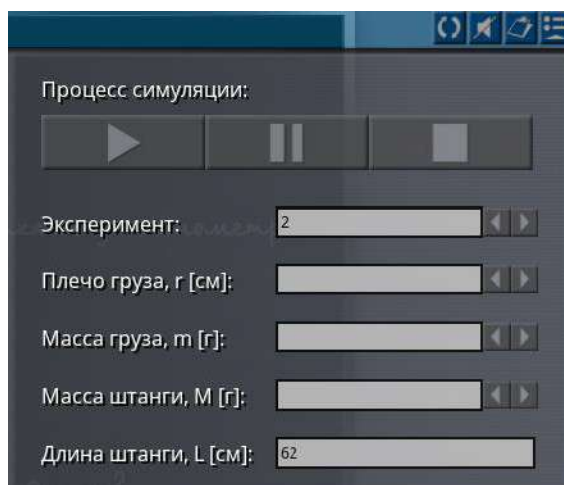


Рис. 6. Пример панели параметров (эксперимент 2). Для других экспериментов панель содержит дополнительные поля для ввода размеров и массы исследуемых тел

3.2. В зависимости от выполняемого эксперимента введите значения параметров исследуемого тела.

3.3. Установите плечо груза равным 5 см, запустите симуляцию.

3.4. Дождитесь появления значения периода колебаний на дисплее цифрового секундомера, запишите показания в таблицу 1.

3.5. Повторите 3.3 и 3.4, изменяя плечо груза от 5 до 30 см с шагом 5 см.

3.6 Перейдите к следующему эксперименту предложенного варианта.

4. Выполняемые эксперименты - **Вариант I.**

4.1 Маятник без установленного тела (рис. 4а). Эксперимент 2, дополнительных параметров не требуется (рис. 6). В таблицу 1 значения периода заносите в столбец $T_0(r)$.

4.2 Маятник с установленным диском (рис. 4б).

Эксперимент 4, дополнительные параметры – диаметр, высота и масса диска. В таблицу 1 значения периода заносите в столбец $T_1(r)$.



4.3 Маятник с установленным шаром (рис. 4в).

Эксперимент 5, дополнительные параметры – диаметр и масса шара. В таблицу 1 значения периода заносите в столбец $T_2(r)$.

5. Выполняемые эксперименты - **Вариант II.**

5.1 Маятник с установленной опорой (рис. 5.а).

Эксперимент 6, дополнительный параметр – масса опоры. В таблицу 1 значения периода заносите в столбец $T_0(r)$.

5.2 Маятник со сплошным цилиндром (рис. 5б).

Эксперимент 7, дополнительные параметры – массы опоры и цилиндра. В таблицу 1 значения периода заносите в столбец $T_1(r)$.

5.3 Маятник с полым цилиндром (трубой).

Эксперимент 8, дополнительные параметры – массы опоры и цилиндра. В таблицу 1 значения периода заносите в столбец $T_2(r)$.

6. При наличии соответствующих указаний преподавателя выполните предложенное дополнительное задание.

Таблица 1. Зависимость $T_k(r)$ для различных конфигураций установки

Масса груза $m = \dots$ г				
№	r , см	$T_0(r)$, с	$T_1(r)$, с	$T_2(r)$, с
1	5			
2	10			
...				
6	30			

Обработка результатов

1. Заполните таблицу 2.

Таблица 2. Данные для построения зависимостей $T_k^2 = T_k^2(2mr^2)$

№	$2mr^2$, кг·см ²	T_0^2 , с ²	T_1^2 , с ²	T_2^2 , с ²
1				
2				
...				
6				
Средние	$\langle 2mr^2 \rangle$, кг·см ²	$\langle T_0^2 \rangle$, с ²	$\langle T_1^2 \rangle$, с ²	$\langle T_2^2 \rangle$, с ²

2. По данным Таблицы 2 постройте на одном листе графики зависимости $T_k^2 = T_k^2(2mr^2)$. Убедитесь, что зависимости линейные и имеют одинаковый угловой коэффициент.
3. Методом парных точек вычислите общий угловой коэффициент a

$$a = \frac{\Delta T_k^2}{\Delta(2mr^2)},$$

для повышения точности собрав в одной таблице данные по всем трем экспериментам.

4. Вычислите среднее значение углового коэффициента $a = \langle a \rangle$, его стандартное отклонение

$$\sigma_{\langle a \rangle} = \sqrt{\frac{\sum (a_{ij} - \langle a \rangle)^2}{n(n-1)}}$$

и случайную погрешность Δa .

5. Используя средние значения из Таблицы 2, вычислите моменты инерции

$$I_0 = \frac{1}{a} \langle T_0^2 \rangle - \langle 2mr^2 \rangle, \quad I_k = \frac{1}{a} \langle T_k^2 \rangle - \langle 2mr^2 \rangle - I_0, \quad k = 1, 2$$

и их погрешность

$$\Delta I_0 = \frac{\Delta a}{a} 2m \sqrt{\langle r^4 \rangle}, \quad \Delta I_k = \sqrt{2} \Delta I_0, \quad k = 1, 2.$$

Если измерения проводились при всех указанных выше значениях l , то

$$\sqrt{\langle r^4 \rangle} \approx 487 \text{ см}^2.$$

Таблица 3. Вычисление углового коэффициента a .

Пары точек $i - j$	$\Delta(2mr^2)_{ij}$ кг·см ²		$\Delta(T_k^2)_{ij}$, с ²	a_{ij} с ² /(кг·см ²)	$a_{ij} - \langle a \rangle$ с ² /(кг·см ²)	$(a_{ij} - \langle a \rangle)^2$ с ⁴ /(кг ² ·см ⁴)
1 – 4		$\Delta(T_0^2)_{ij} =$				
2 – 5						
3 – 6						
1 – 4		$\Delta(T_1^2)_{ij} =$				
...						
1 – 4		$\Delta(T_2^2)_{ij} =$				
...						
				$\langle a \rangle =$		$\sum (a_{ij} - \langle a \rangle)^2 =$

6. Запишите окончательный результат для вычисленных моментов инерции.
7. Вычислите теоретические значения моментов инерции исследованных тел, используя формулы из Приложения. Сравните результаты с полученными экспериментально.

Дополнительное задание 1

Непосредственное измерение жесткости пружины. Эксперимент 1, параметры – плечо силы, угол поворота. Для заданного преподавателем значения угла поворота α , измерьте прилагаемую силу F , изменяя ее плечо r от 10 до 30 см с шагом 5 см. Результаты занесите в таблицу 3.

Таблица 4. Измерение жесткости пружины.

r , м	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
F , Н					
f , Н·м					

Для каждого измерения вычислите угловую жесткость пружины по формуле (не забудьте перевести градусы в радианы!)

$$f = \frac{F \cdot r}{\alpha}$$

и занесите найденные значения в таблицу. Вычислите среднее значение $\langle f \rangle$ и его погрешность Δf .

Воспользовавшись результатами основной части работы, по формуле (6) вычислите угловую жесткость пружины, найденную методом крутильных колебаний (не забудьте перевести сантиметры в метры!). Сравните полученное значение с результатом прямого измерения.

Дополнительное задание 2

Проверка теоремы Штейнера. Эксперимент 3. Установите указанные преподавателем значения плеча грузов, массы груза, штанги и диска. Изменяя смещение диска a от 0 до 14 см с шагом 2 см,

измерьте период колебаний крутильного маятника (можно не записывать значения, а воспользоваться данными, сохраняющимися в data_sheet.csv). Поместите полученные данные в таблицу 5.

Таблица 5. Период колебаний при различных смещениях диска

a , см	0	2	4	6	8	10	12	14
T , с								
a^2 , см ²								
T^2 , с ²								

Заполните оставшиеся строки таблицы 5. Постройте график зависимости $T^2(a^2)$. Убедитесь, что зависимость носит линейный характер. Объясните, почему?

Контрольные вопросы

1. Почему момент инерции сплошного цилиндра меньше момента инерции трубы такой же массы и такого же радиуса?
2. В каких единицах в данной работе измеряется угловая жесткость пружины?
3. На крутильный маятник устанавливают штангу (стержень) без грузов. В первом случае ось вращения проходит через ее середину, во втором – через один из концов. Во сколько раз будут отличаться периоды крутильных колебаний?

Литература

1. Детлаф А. А. Курс физики: учебное пособие для вузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. 9-е изд., стер. М.: Академия, 2014. 719с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики : учебное пособие : в 3 томах / И. В. Савельев. — 17-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2021 — Том 1 : Механика. Молекулярная физика — 2020. — 436 с.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики : учебное пособие для физических

специальностей вузов : [в 5 томах] / Д. В. Сивухин. Изд. 6-е, стер. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014-2019. Т. 1: Механика. 2019. 560 с.

4. Иванов В.К. Физика. Механика. Колебания: учеб. пособие/ В.К. Иванов. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 224 с.
5. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных: метод. указания / сост.: Б. Д. Агапьев, В. В. Козловский. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 61 с.

Моменты инерции некоторых тел

Тело	Момент инерции
Материальная точка массой m на расстоянии r от оси вращения	$I = mr^2$
Однородный тонкий стержень массой m , длиной l относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно его длине	$I = \frac{1}{12}ml^2$
Однородный тонкий стержень массой m , длиной l относительно оси, проходящей через конец стержня, перпендикулярно его длине	$I = \frac{1}{3}ml^2$
Кольцо или труба с тонкими стенками радиусом R и массой m . Ось вращения проходит через центр кольца перпендикулярно плоскости кольца или совпадает с осью трубы	$I = mR^2$
Круглый сплошной диск (цилиндр) радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через центр диска (цилиндра) перпендикулярно основанию.	$I = \frac{1}{2}mR^2$
Полый цилиндр относительно оси, проходящей через центр цилиндра перпендикулярно основанию.	$I = \frac{1}{2}m(R_{\text{вн}}^2 + R_{\text{внеш}}^2)$
Однородный шар радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через центр шара	$I = \frac{2}{5}mR^2$