

Лабораторная работа В2.05

ПРОСТЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Цель работы

Изучение свободных гармонических колебаний на примере пружинного маятника.

Задачи

1. Получить экспериментальные зависимости отклонения пружинного маятника от положения равновесия от времени для грузов разных масс.
2. Построить зависимость квадрата периода колебаний от массы груза для выбранной пружины.
3. Определить коэффициент жесткости пружины.
4. Определить логарифмический декремент затухания.

Введение

Колебания играют очень важную роль в понимании различных процессов во всех областях физики. С их помощью описывают движение маятников, упругие колебания пружин под действием внешних сил, колебания струны, тепловое движение атомов в кристаллической решетке, а также переменный электрический ток в цепях, распространение электромагнитных волн, интерференцию, дифракцию, оптические спектры атомов и молекул и многие другие процессы. Самыми простыми и наиболее важными для рассмотрения среди колебательных явлений являются простые гармонические колебания. Гармонические колебания представляют собой периодическое изменение физической величины со временем относительно положения равновесия, происходящее по закону косинуса или синуса.

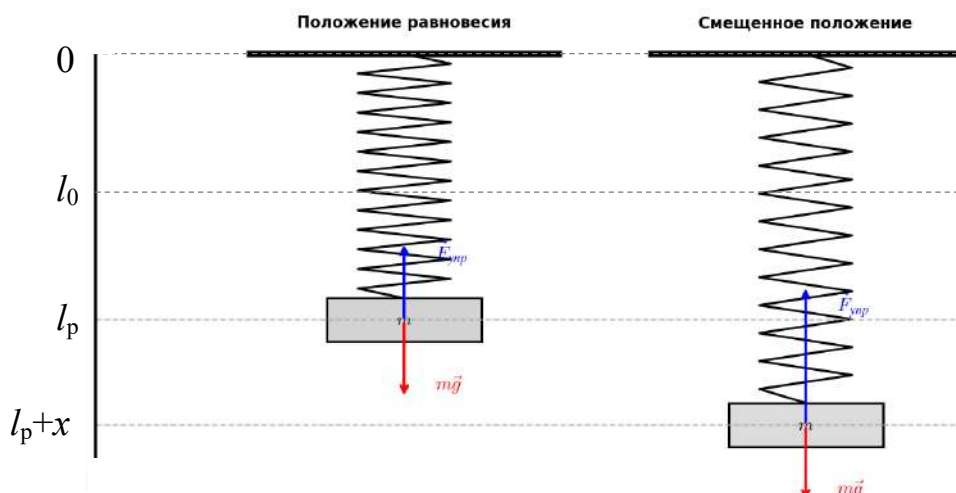


Рис. 1. Пружинный маятник в положении равновесия, и выведенный из него

В лабораторной работе рассматриваются колебания пружинного маятника – груза, подвешенного на пружине, совершающего вертикальные колебания в однородном поле силы тяжести (рис. 1). На груз массы m действует сила тяжести и сила упругости, поэтому второй закон Ньютона будет выглядеть следующим образом:

$$ma = mg - k(l - l_0). \quad (1)$$

Здесь $(l - l_0)$ – удлинение пружины, где l_0 – длина недеформированной пружины, l – её текущая длина, k – жёсткость пружины.

В положении равновесия ускорение равно 0, поэтому

$$0 = mg - k(l_p - l_0), \quad (2)$$

где l_p – длина пружины в равновесном состоянии.

Вычитая (2) из (1) и, вводя обозначение $x = l - l_p$, получаем

$$ma = -k(l - l_p) = -kx,$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3)$$

где $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Простой подстановкой можно убедиться, что решением такого уравнения является функция вида:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (4)$$

где A – амплитуда колебаний, $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний, φ_0 – начальная фаза (фаза в момент времени $t = 0$).

Из уравнения (4) следует, что груз будет совершать колебания с частотой

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5)$$

Период колебаний T не зависит от амплитуды колебаний, а определяется исключительно характеристиками колебательной системы – массой груза и коэффициентом жесткости пружины.

В реальных системах всегда наблюдается затухание из-за наличия диссипативных сил, в результате действия которых энергия колебаний маятника постепенно уменьшается. Если учесть действие на пружинный маятник силы сопротивления, величина которой пропорциональна скорости движения $F_{\text{сопр}} \sim v$, то второй закон Ньютона примет вид

$$ma = mg - k\Delta l - rv.$$

Здесь r – коэффициент сопротивления. После преобразований получаем уравнение затухающих колебаний:

$$ma = -kx - rv,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0 . \quad (6)$$

Здесь $\gamma = \frac{r}{2m}$ – коэффициент затухания. Решением данного уравнения является функция вида:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \varphi) \quad (7)$$

где A_0 – начальная амплитуда колебаний, а $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – частота затухающих колебаний. График этой функции показан на рисунке 2.

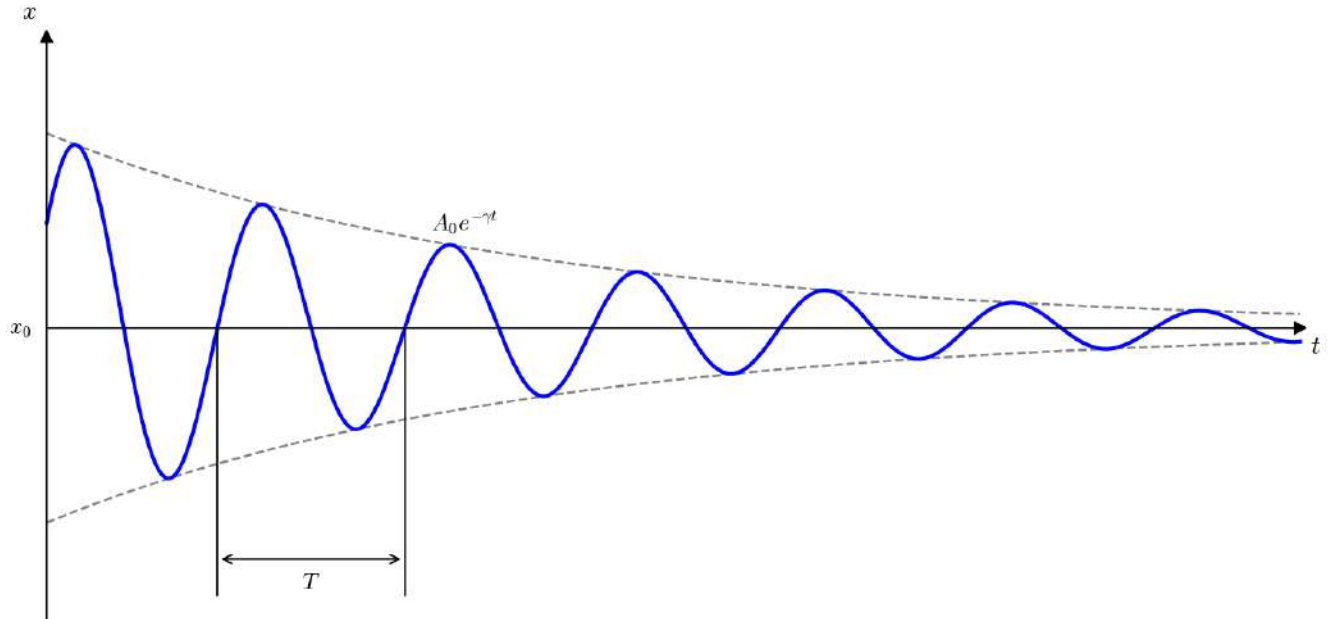


Рис. 2. Затухающие колебания.

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} .$$

Для описания скорости затухания принято рассматривать изменения, происходящие в системе за один период T . Поскольку амплитуда убывает по экспоненциальному закону, в качестве характеристики затухания удобно

использовать логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \gamma T . \quad (8)$$

Время, за которое амплитуда уменьшается в e раз, называется временем затухания или временем релаксации:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e^{\gamma\tau} = e^1 , \quad \tau = \frac{1}{\gamma} . \quad (9)$$

За это время система успевает совершить

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\lambda}$$

колебаний. Откуда видно, что логарифмический декремент затухания есть величина, обратная числу колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Поскольку точность измерений координаты датчиком невелика, определение логарифмического декремента затухания по двум соседним максимумам может приводить к неточностям. Для уменьшения погрешности оценивают изменение амплитуды колебаний через большой промежуток времени, содержащий в себе n полных периодов. Если принять $n=10$, то формула (8) преобразуется к виду:

$$\lambda = \frac{1}{10} \ln \frac{A_1}{A_{11}} , \quad (11)$$

где A_1 – амплитуда выбранного максимума, а A_{11} – амплитуда максимума, отстоящего на 10 периодов от первого.

Экспериментальная установка

Общий вид экспериментальной установки показан на рисунке 2.

На металлическом штативе 1 закреплена винтовая пружина 2, к концу которой прикрепляется платформа с грузами-разновесами 3. В процессе колебаний ультразвуковой датчик движения 4 фиксирует положение груза по отраженному от него сигналу и посылает данные на устройство обработки 5. Высокая частота

опроса датчика позволяет в реальном времени строить на экране монитора зависимость координаты от времени.

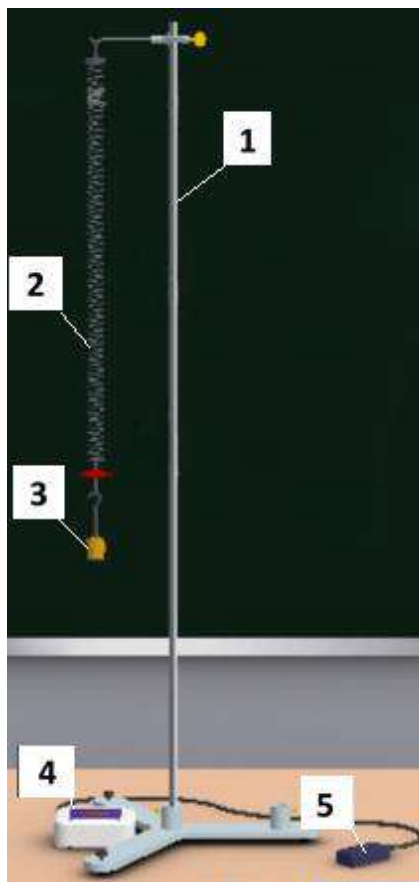


Рис. 3. Общий вид экспериментальной установки: 1 – штатив, 2 – винтовая пружина, 3 – грузы-разновесы, 4 – ультразвуковой датчик движения, 5 – устройство обработки данных

Порядок проведения эксперимента

1. Занесите в таблицу 1 заданные преподавателем значения жесткости пружины k и массы грузов.
2. Запустите программу виртуальной лабораторной работы «Простые гармонические колебания». Нажмите кнопку «Начать эксперимент».
3. На панели параметров эксперимента (рис. 4) установите жёсткость пружины и массу первого груза.
4. Запустите процесс симуляции.

Таблица 1. Зависимость периода колебаний пружины от массы груза.

$k = \dots \text{ Н/м}, \quad x_0 = \dots \text{ см}$					
№	m , кг	T , с	T^2 , с ²	$x_{m,0}$, см	$x_{m,10}$, см
1					
...					
...					

5. Включите отображение графика. На экране отобразится график затухающих колебаний пружинного маятника.

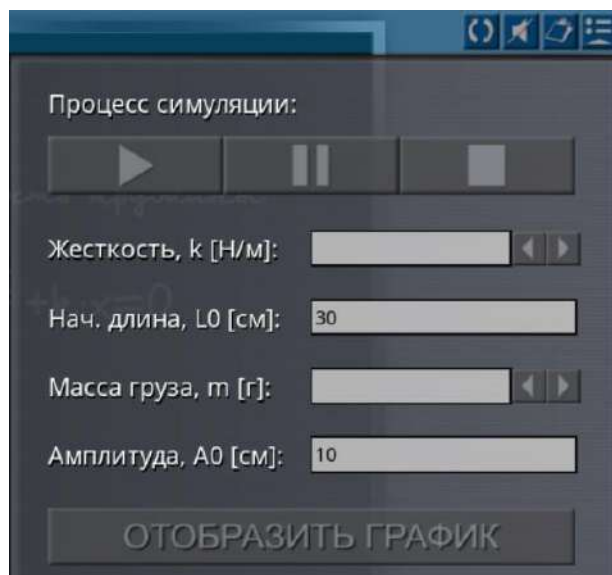


Рис.4. Панель параметров эксперимента

6. После того как система совершит не менее 10 полных колебаний, остановите симуляцию кнопкой «Пауза».

7. Используя встроенный курсор, определите координату положения равновесия x_0 как положение маятника в момент $t = 0$. Запишите результат в таблицу 1.

8. Определите координаты максимумов $x_{m,1}$ и $x_{m,11}$ (рис. 5), при необходимости

изменяя масштаб по оси t , и запишите полученные величины в таблицу 1.

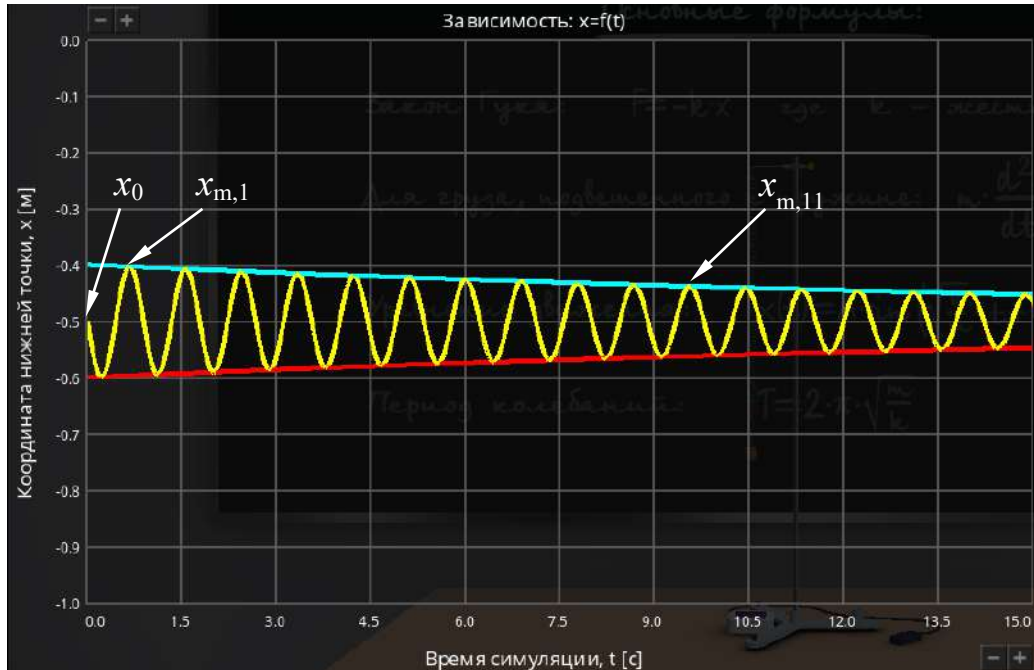


Рис.5. Измеряемые точки на графике

9. Повторите измерения пунктов 3–8 для всех остальных указанных преподавателем значений масс груза.
10. Скачайте файл экспериментальных данных в формате `data_sheet.csv`, содержащий значения периодов колебаний для выполненных измерений. Заполните оставшиеся столбцы таблицы 1, используя полученные данные.

Обработка результатов

1. По данным таблицы 1 постройте зависимость квадрата периода колебаний пружины от массы груза $T^2 = T^2(m)$.
2. Для зависимости $T^2 = T^2(m)$ методом парных точек найдите угловой коэффициент a :

$$a = \frac{\Delta(T^2)}{\Delta m}.$$

Результаты вычислений занесите в таблицу 2.

3. Вычислите среднее значение углового коэффициента $\langle a \rangle$ и его случайную погрешность Δa .

Таблица 2. Вычисление углового коэффициента a зависимости $T^2 = T^2(m)$.

Пары точек i-j	Δm_{ij} , кг	$\Delta(T^2)_{ij}$, с ²	$a_{ij} = \frac{\Delta(T^2)_{ij}}{\Delta m_{ij}},$ с ² /кг = м/Н	$a_{ij} - \langle a \rangle,$ м/Н	$(a_{ij} - \langle a \rangle)^2,$ (м/Н) ²
1-...					
...-...					
			$\langle a \rangle =$		$\sum (a_{ij} - \langle a \rangle)^2 =$

4. Используя формулу (5), найдите экспериментальное значение коэффициента жесткости пружины.

$$k = \frac{4\pi^2}{\langle a \rangle}.$$

5. Определите погрешность экспериментального значения коэффициента жесткости пружины, используя формулу:

$$\Delta k = \frac{4\pi^2}{\langle a \rangle^2} \Delta a.$$

6. Рассчитайте значения амплитуд как смещение относительно положения равновесия. Результаты занесите в таблицу 3.

Таблица 3. Расчет логарифмического декремента затухания

№	$A_1 = x_{m,1} - x_0$, см	$A_{11} = x_{m,11} - x_0$, см	λ	$\lambda - \langle \lambda \rangle$	$(\lambda - \langle \lambda \rangle)^2$
1					
...					
...					
			$\langle \lambda \rangle =$		$\sum (\lambda - \langle \lambda \rangle)^2 =$

7. По формуле (11) определите логарифмический декремент затухания λ для каждого опыта.
8. Определите среднее значение и случайную погрешность λ .
9. В выводе сравните получившееся значение коэффициента жесткости пружины с заданным.

Контрольные вопросы

1. Что такое гармонические колебания? Почему в реальных физических системах они почти нереализуемы?
2. Как изменится логарифмический декремент затухания, если этот же пружинный маятник перенести из воздуха в более вязкую среду, например, в масло?
3. В каких точках траектории пружинного маятника будет происходить наибольшая потеря энергии?
4. Как отличаются частоты затухающих колебаний и собственной частоты системы? Как они изменятся при смене среды с воздуха на вакуум?

Литература

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учеб. пособие в 5 т. Т I. Механика – 4-е изд., - М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. – 560 с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики: учеб. пособие: в 3-х т. Т.1 Механика. Молекулярная физика. 4-е изд. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 432 с.
3. Иванов В. К. Физика. Механика. Колебания: учеб. пособие/ В.К. Иванов. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 224 с.
4. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных: метод. указания / сост.: Б. Д. Агапьев, В. В. Козловский. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2021. – 61 с.