1.2. Основные законы электростатики в вакууме.

2.1. Закон Кулона.

Ш. Кулон (1785 г.) экспериментально установил *фундаментальный закон*, определяющий силу взаимодействия точечных зарядов. Он проводил опыты с крутильными весами для точечных зарядов. Под точечными зарядами понимались частицы, размеры которых значительно меньше расстояния между ними $r \ll r_{12}$.

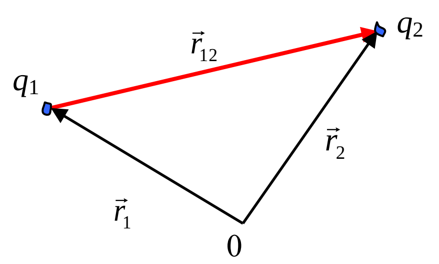

Рис. 2.1.

Формулировка закона Кулона: *сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды*.

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \tag{1.2.1}$$

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

Выбор коэффициента k в (1.2.1) зависит от системы единиц. Рассмотрим основные единицы заряда.

Система *СИ*.

Основные единицы этой системы: длина L – метр (*м*), масса M – килограмм (*кг*), время T – секунда (*с*), температура – Кельвин (*К*) и сила тока – Ампер (*А*). При этом величина заряда и сила определяются независимо друг от друга: сила из второго закона Ньютона, а заряд из величины тока

1 заряда (Кулон) = 1*Кл* = 1 *А*·1 *с*

При этом коэффициент k в (1.2.1) является размерной величиной и равен:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{1.2.2}$$

где коэффициент равен $k = 9\cdot 10^9\,\frac{м}{Ф}$, а величина ε_0 – *диэлектрическая постоянная*

$$\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{Кл^2 с^2}{кг\cdot м^3} = 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}$$

Здесь *Ф* - Фарада, единица емкости. Единица заряда – Кулон – большая единица заряда. Так, сила взаимодействия 2-х точечных зарядов по 1 *Кл* на расстоянии в 1 *км* = 10^3 *м* равна:

$$F = 9\cdot 10^9\cdot\frac{1}{10^6} = 9\cdot 10^3\,Н.$$

Система *CGSE*.

Основные единицы в этой системе: длина L – сантиметр (*см*), масса M – грамм (*г*), время T – секунда (*с*), температура – Кельвин (*К*). Сила как величина производная, определяемая по второму закону Ньютона, измеряется в Динах (*Дн*). В этой системе заряд является производной единицей и определяется через силу по закону Кулона, считая при этом, что коэффициент k равен единице: $k = 1$. Отсюда система единиц имеет название *CGSE*, т.е. добавляется к основным единицам единица электрического заряда:

$$\left[q\right] = 1\,CGSE\,заряда = 1\,CGSE_q = \left[M\cdot L^3\cdot T^{-2}\right]^{1/2} = г^{1/2}\cdot см^{3/2}\cdot с^{-1} \tag{1.2.3}$$

Связь между единицами заряда в двух системах:

$$1\,Кл \approx 3\cdot 10^9\,CGSE_q \tag{1.2.4}$$

Здесь коэффициент $3\cdot 10^9$ фактически есть произведение 10 на величину скорости света ($c = 3\cdot 10^8$ *м/с*).

В нашем курсе мы в основном будем пользоваться системой *CGSE* (и, так называемой, системой единиц Гаусса, которую подробнее обсудим далее).

Примечание 1. *Шарль О. Кулон, французский физик, 1736-1806.*

1.2.2. Напряженность электрического поля.

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего пространства, создает в нем электрическое поле, которое проявляется в воздействии на помещенный в него пробный заряд q_0. Силовая характеристика электрического поля – *напряженность электрического поля*, которая определяется как сила, действующая на единичный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \tag{1.2.5}$$

Следовательно, напряженность электрического поля есть векторная величина. Напомним, что силовые характеристики поля сил уже были введены в курсе механики (см §1.9, пункт 1.9.4.).

Напряженность поля точечного заряда q получается из закона Кулона:

$$\vec{E} = \frac{q}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}, \qquad E = \frac{q}{r_{12}^2} \tag{1.2.6}$$

Электрическое поле, напряженность которого постоянна по величине и по направлению во всех точках пространства, называется *однородным полем*:

$$\vec{E} = const\,. \tag{1.2.7}$$

Из обобщения опытных фактов следует *принцип суперпозиции* электрических полей. Если имеется система зарядов, то сила на пробный заряд q_0 со стороны i -го заряда не изменится, если присутствуют другие заряды:

$$\vec{F}_i = \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^3}\vec{r}_{0i} \tag{1.2.8}$$

Полная сила на пробный заряд q_0 записывается как сумма сил, действующих со стороны каждого из зарядов:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = q_0 \sum_i \frac{q_i \vec{r}_{0i}}{r_{0i}^3} = q_0 \sum_i \vec{E}_i = q_0 \vec{E} \tag{1.2.9}$$

Итак, принцип суперпозиции: *напряженность электрического поля от всех зарядов определяется как векторная сумма напряженностей*, создаваемых отдельными зарядами:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \tag{1.2.10}$$

О единицах измерения: поскольку связь между единицами силы в системах *СИ* и *CGSE* определяется соотношением $1\ Н = 10^5\ Дн$, то, используя (1.2.4), получаем связь между единицами напряженности электрического поля в системах *CGSE* и *СИ* (*В/м - Вольт/метр*) определяется:

$$[E] = 1\ CGSE_E = 3\cdot 10^4\ В/м \tag{1.2.11}$$

Если имеем непрерывное распределение заряда в объеме V (см рис.2.2), то для определения напряженности поля в точке наблюдения P поступают следующим образом. Объем разбивают на маленькие кусочки – элементы объема, которые можно считать точечными зарядами

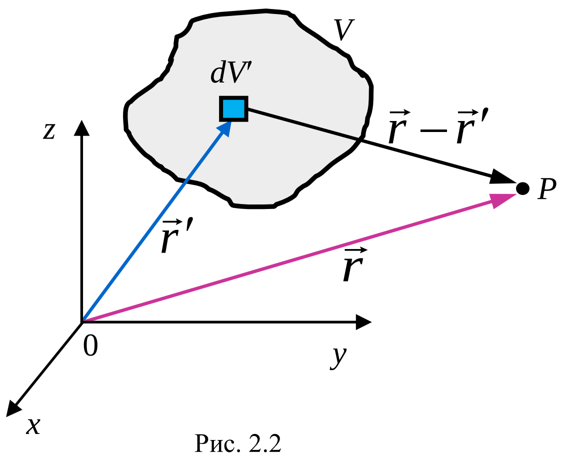

Рис. 2.2

$$dq = \rho(x', y', z')dV',$$

где ρ – плотность распределенного заряда в точке с радиус-вектором $\vec{r}'(x', y', z')$. Тогда электрическое поле находится:

$$\vec{E} = \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \tag{1.2.12}$$

В Декартовой системе координат элемент объема записывается как обычно

$$dV' = d\vec{r}' = dx'dy'dz'.$$

Этот интеграл (1.2.12) надо понимать, как условную запись. Реально при вычислении полной напряженности надо рассматривать проекции на оси координат и проводить интегрирование (суммирование) для каждой проекции отдельно. Например, по оси x имеем:

$$E_x = \int \rho(\vec{r}\,')\frac{x - x'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}dV' \qquad (1.2.13)$$

Получив все проекции, легко затем получить вектор напряженности поля, складывая эти проекции как вектора со своими ортами.

Аналогично определяется электрическое поле от зарядов, распределенных по поверхности. В этом случае в качестве точечного заряда рассматривается заряд, находящийся на бесконечно маленьком элементе поверхности dS: $dq = \sigma dS$, где σ – поверхностная плотность заряда, а интегрирование проводится по всей поверхности. Так проекция поля на ось x определяется аналогично (1.2.13):

$$E_x = \int \sigma(\vec{r}\,')\frac{x - x'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}dS' \qquad (1.2.14)$$

Силовые линии электрического поля: графически удобно представлять поле вектора в виде линий тока вектора или силовых линий. Силовые линии – кривые в пространстве, касательные к которым совпадают с направлением напряженности поля в данной точке. В присутствии зарядов они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах. Их направление совпадает с направлением силы, действующей на положительные заряды, помещенные в этих точках.

Простейшие примеры силовых линий напряженности поля представлены ниже на рисунках 2.3 -2.6. Поле точечного заряда (или поле равномерно заряженного шара или сферы) представляет собой прямые линии, исходящие из положительного заряда (рис. 2.3) и входящие в отрицательный заряд (рис. 2.4). Плотность этих линий падает с расстоянием от центра зарядов обратно пропорционально квадрату расстояния в соответствие с законом Кулона.

Силовые линии однородного поля параллельны друг другу и поэтому постоянны по плотности (рис. 2.5). Более сложно выглядит поле *электрического диполя* (диполь – система положительного и отрицательного зарядов, одинаковых по модулю): силовые линии выходят из положительного заряда (вблизи его как из точечного заряда) и затем заканчиваются на отрицательном заряде (рис. 2.6).

Силовые линии поля точечного положительного заряда

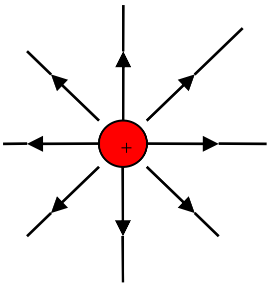

Рис. 2.3.

Силовые линии поля точечного отрицательного заряда

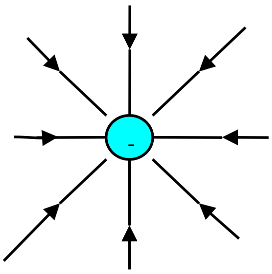

Рис. 2.4.

Силовые линии однородного электрического поля:

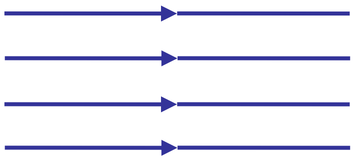

Рис. 2.5.

Силовые линии поля диполя

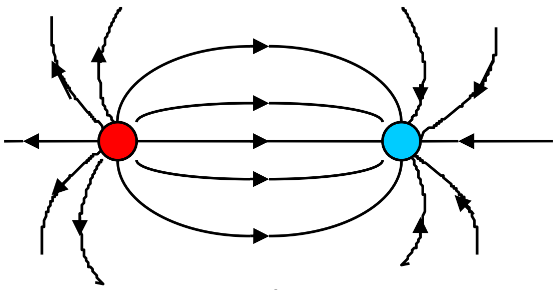

Рис. 2.6.

Приложение 1.

Приведем несколько примеров вычисления напряженностей полей.

1). <u>Электрическое поле равномерно заряженной нити</u>. Рассчитаем поле, создаваемое нитью длины l заряженной линейной плотностью заряда τ, в точке P, с координатами, показанными на рисунке 2.7. Электрическое поле, создаваемое элементом нити dx с зарядом $dq = \tau dx$ в точке P равно:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{r^3}\vec{r} = \frac{\tau dx}{r^3}\vec{r}$$

где r – расстояние от элемента dx до точки P. Интегрирование необходимо проводить по проекциям, поэтому запишем проекции вектора

$$dE_x = \frac{\tau dx}{r^2}\cos\theta = \frac{\tau dx}{r^2}\frac{l+a-x}{r}$$

$$dE_y = \frac{\tau dx}{r^2}\sin\theta = \frac{\tau dx}{r^2}\frac{h}{r}$$

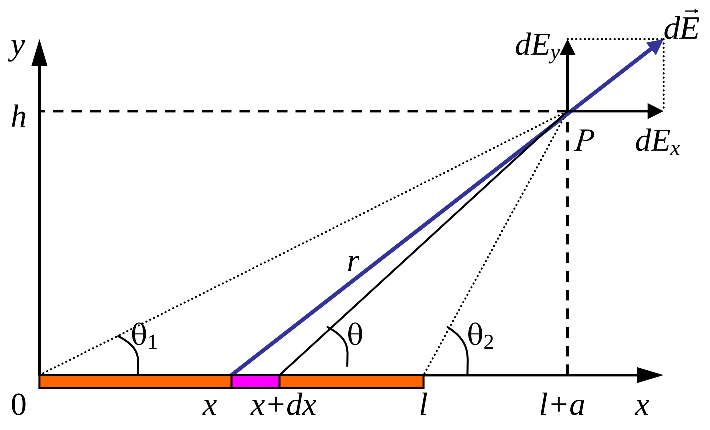

Рис. 2.7.

Здесь $r = \sqrt{(l+a-x)^2 + h^2}$.

Интегрирование удобнее проводить по углу θ. Поэтому выразим расстояние r и элемент dx через этот угол и его приращение $d\theta$

$$r = \frac{h}{\sin\theta}, \quad dr = -\frac{h}{\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta,$$

$$dx = -\frac{dr}{\cos\theta} = \frac{h\, d\theta}{\sin^2\theta}$$

Тогда проекции вектора $d\vec{E}$ имеют вид

$$dE_x = \frac{\tau dx}{r^2}\cos\theta = \frac{\tau h d\theta}{\sin^2\theta}\frac{\sin^2\theta}{h^2}\cos\theta = \frac{\tau}{h}\cos\theta\, d\theta$$

$$dE_y = \frac{\tau dx}{r^2}\sin\theta = \frac{\tau h d\theta}{\sin^2\theta}\frac{\sin^2\theta}{h^2}\sin\theta = \frac{\tau}{h}\sin\theta\, d\theta$$

Проводя интегрирование в пределах углов θ_1 и θ_2 (см рис. 2.7), получаем

$$E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\tau}{h}\cos\theta\, d\theta = \frac{\tau}{h}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta = \frac{\tau}{h}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\tau}{h}\sin\theta\, d\theta = \frac{\tau}{h}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta = \frac{\tau}{h}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

Можно компоненты вектора напряженности записать через параметры l и a, выражая косинусы и синусы через них:

$$\cos\theta_1 = \frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2 + h^2}}, \quad \cos\theta_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}},$$

$$\sin\theta_1 = \frac{h}{\sqrt{(l+a)^2 + h^2}}, \quad \sin\theta_2 = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$E_x = \tau\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l+a)^2+h^2}}\right)$$

$$E_y = \frac{\tau}{h}\left(\frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2+h^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)$$

Рассмотрим предельные случаи:

А) поле бесконечной нити: $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$ (или $a = -l/2$ при $l \to \infty$), получаем

$$E_x = 0, \qquad E_y = \frac{2\tau}{h}$$

Б) поле на краю полубесконечной нити: $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi/2$ (или $a = 0$ и $l \to \infty$), получаем:

$$E_x = \frac{\tau}{h}, \qquad E_y = \frac{\tau}{h}$$

2). <u>Электрическое поле в центре полусферы</u> радиуса R, равномерно заряженной поверхностной плотностью заряда σ. На поверхности полусферы выделим маленький кусочек поверхности $dS = r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$. Этот элемент поверхности имеет заряд $dq = \sigma dS = \sigma r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$. В центре полусферы он создает поле, равное:

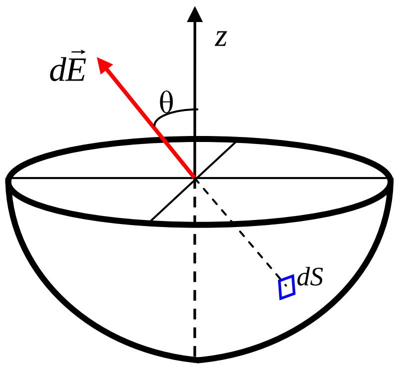

Рис. 2.8.

$$d\vec{E} = \frac{dq}{r^3} d\vec{r}$$

В силу симметрии поле должно быть направлено по оси z. Поэтому достаточно рассмотреть только z–вую составляющую электрического поля

$$dE_z = \frac{dq}{r^2} \cos\theta = \sigma \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi$$

Проинтегрировав по углам по φ от 0 до 2π и по θ от 0 до $\pi/2$, получаем ответ, что электрическое поле в центра равномерно заряженной полусферы равно:

$$E_z = \pi\sigma.$$