1.3. Теорема Гаусса.

1.3.1. <u>Поток вектора через поверхность</u>.

Поток вектора через поверхность – одно из важнейших понятий любого векторного поля, в частности электрического – $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$.

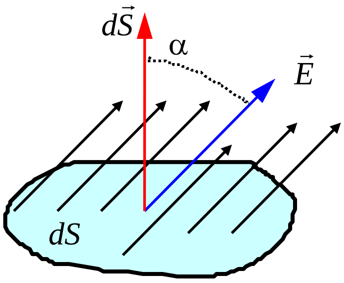

Рис. 3.1.

Рассмотрим маленькую площадку dS с единичным вектором нормали $\vec{n}$ (рис. 3.1): $d\vec{S} = dS\vec{n}$. Поток вектора через эту площадку определяется как скалярное произведение вектора поля и вектора элементарной площадки:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,dS\,Cos\alpha \tag{1.3.1}$$

Поток вектора – скалярная величина. Однако в зависимости от взаимного направления вектора поля и вектора площадки поток имеет положительный или отрицательный знак.

<u>Примечание 1</u>. Здесь можно провести аналогию с потоком жидкости: поток объема жидкости через площадку сечением dS равен

$$d\Phi = \Delta V / \Delta t = dS \cdot vCos\alpha = \left(\vec{v}, d\vec{S}\right)$$

Итак, поток вектора $\vec{E}$ через элементарную площадку можно записать несколькими способами:

$$d\Phi = EdSCos\alpha = E_n dS = EdS_E \tag{1.3.2}$$

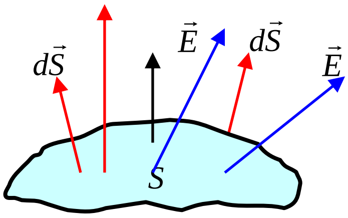

Рис. 3.2.

где E_n – проекция вектора напряженности электрического поля на направление нормали к поверхности, dS_E – проекция элементарной площадки на направление напряженности электрического поля. Поток через поверхность S конечного размера определяется интегралом от элементарных потоков:

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}\,. \tag{1.3.3}$$

Здесь интеграл берется по поверхности S (см рис. 3.2), через которую определяется поток вектора.

1.3.2. <u>Поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность</u>.

а). Пусть имеем точечный заряд q. Рассмотрим для начала поток вектора $\vec{E}$ через сферическую поверхность, окружающую заряд с центром в точке нахождения заряда. Так как в этом случае вектора напряженности поля и элемента поверхности с внешней нормалью параллельны $\vec{E} || d\vec{S}$ и сонаправлены, а модуль вектора E, постоянен на поверхности сферы, то в результате для потока вектора $\vec{E}$ через всю поверхность получаем:

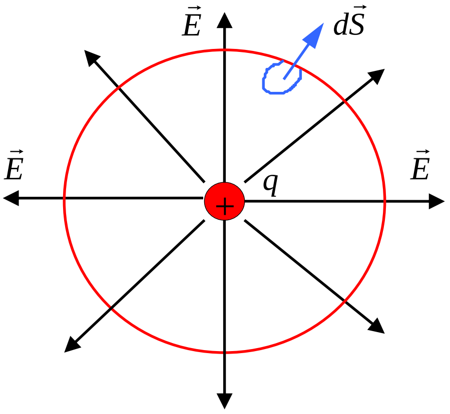

Рис. 3.3.

$$\Phi = \int \vec{E}d\vec{S} = \int EdS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q$$

Итак, если имеем заряд q внутри сферы, то поток вектора напряженности электрического поля через эту поверхность равен:

$$\Phi = \oint \vec{E}d\vec{S} = 4\pi q \tag{1.3.4}$$

б). Рассмотрим теперь общий случай, когда заряд q находится внутри произвольной замкнутой поверхности S, например как изображено на рисунке 3.4. Через любой элемент этой поверхности $d\vec{S}$ (с внешней нормалью) сосчитаем поток

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdSCos\alpha = \frac{q}{r^2} dSCos\alpha = qd\Omega, \tag{1.3.5}$$

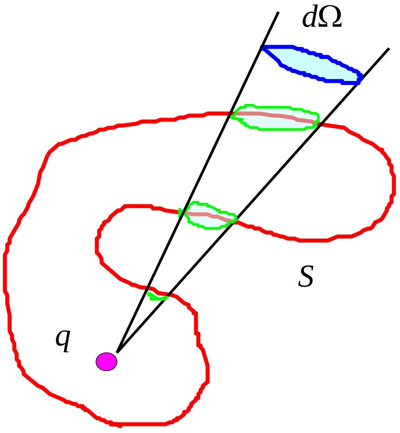

Рис. 3.4.

где $d\Omega = dS\cos\alpha / r^2$ – элемент телесного угла. Видно из рисунка 3.4, что элемент телесного угла $d\Omega$ пересекает 3 элемента поверхности, т.е. имеем три равных друг другу потока вектора напряженности электрического поля через эти малые поверхности. При этом один поток вектора $\vec{E}$, входящий внутрь поверхности S (против нормали), сокращается с тем же потоком, выходящим из поверхности S (по нормали). Таким образом, в сумме остается только один выходящий поток через элемент телесного угла $d\Omega$. Тогда полный поток вектора $\vec{E}$ через всю поверхность S равен опять произведению заряда на полный телесный угол, равный 4π:

$$\Phi = q\oint d\Omega = 4\pi q \tag{1.3.6}$$

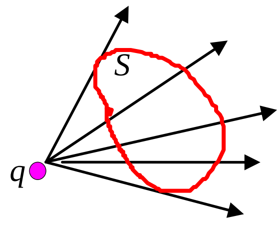

Рис. 3.5.

Отсюда также следует, что если заряд находится снаружи замкнутой поверхности (рис. 3.5), то полный поток через эту поверхность равен нулю: $\Phi = 0$. Физически это понятно и очевидно: сколько силовых линий вошло внутрь поверхности, столько и вышло из нее.

в). Обобщим полученный результат далее. Пусть поле создается любой системой зарядов (рис. 3.6), тогда всю систему можно разбить на точечные заряды Δq и для каждого из них в отдельности повторить ту же процедуру для получения потока. Пользуясь принципом суперпозиции $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$, получаем, что уравнение

$$\Phi = \oint \vec{E}d\vec{S} = 4\pi q$$

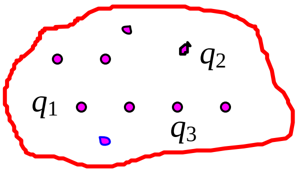

Рис. 3.6.

может быть обобщено для любой системы зарядов, расположенных произвольным образом. В самом деле, поток вектора $\vec{E}$ равен сумме потоков каждого из векторов $\vec{E}_i$:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i \oint \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_i 4\pi q_i = 4\pi q \tag{1.3.7}$$

Итак, получаем *электростатическую теорему Гаусса:*

поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность равен полному заряду внутри этой поверхности, умноженному на 4π.

Математически теорема Гаусса записывается в виде:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = 4\pi q \tag{1.3.8}$$

где q – суммарный заряд внутри поверхности S. Их расположение внутри поверхности не играет никакой роли. Заряды, расположенные вне замкнутой поверхности S не вносят вклада в поток Φ, ибо, сколько силовых линий входит в замкнутую поверхность, столько этих линий и выходит.

Физический смысл теоремы Гаусса состоит в том, что источниками электрического поля являются заряды, поэтому поток электрического вектора через замкнутую поверхность пропорционален заряду внутри ее.

Для непрерывного распределения заряда с объемной плотностью ρ имеем аналогично:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV \tag{1.3.9}$$

где интеграл от плотности заряда в правой части уравнения берется по объему V, окруженному замкнутой поверхностью S. Это запись одного из уравнений Максвелла в интегральной форме (за исключением того факта, что вместо вектора индукции электрического поля $\vec{D}$ стоит напряженность $\vec{E}$).

Теорема Гаусса – следствие закона Кулона. Она справедлива для всех векторных полей, у которых точечные источники поля дают напряженность поля $\sim 1/r^2$. В частности, теорема Гаусса справедлива для закона тяготения тоже.

Примечание 2. В системе *СИ* теорема Гаусса записывается как: $\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{q}{\varepsilon_0}$

1.3.3. Применение теоремы Гаусса для расчета полей.

Теорема Гаусса имеет фундаментальное значение для теории. Для практического применения ее удобно использовать только для расчета полей, обладающих той или иной симметрией. Рассмотрим некоторые важные примеры.

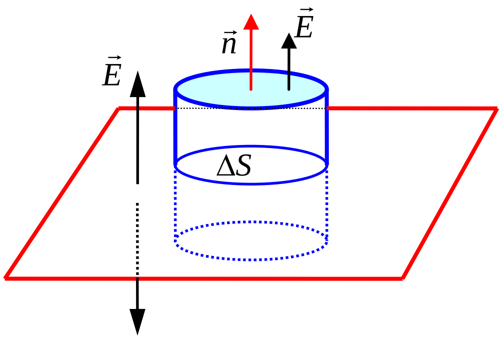

Рис. 3.7.

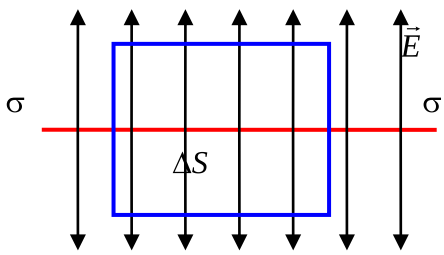

Рис. 3.8.

а). Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.

Пусть плоскость, изображенная на рис. 3.7, заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда σ (заряд, распределенный на единичной площади поверхности $\sigma = \frac{dq}{dS}$). Из соображений симметрии можно увидеть (или можно сосчитать), что вектор электрического поля перпендикулярен плоскости, т.е. $\vec{E} \| \vec{n}$ ($\vec{n}$ единичный вектор нормали к плоскости) или $d\vec{S}$ (вектор элемента поверхности плоскости). В качестве поверхности, через которую сосчитаем поток вектора напряженности электрического поля, выбираем цилиндрическую поверхность (см рис. 3.7). Поперечное сечение этой поверхности есть прямоугольник (см рис. 3.8). Поскольку напряженность электрического поля вверх или вниз от плоскости одинакова, а поток через боковую поверхность равен 0 (из-за того, что скалярное произведение $\vec{E}$ и элемента боковой поверхности $d\vec{S}$ равно нулю), получаем:

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = 2E\Delta S = 4\pi\sigma\Delta S$$

Сокращая на элемент поверхности ΔS , получаем поле от равномерно заряженной плоскости:

$$E = 2\pi\sigma \tag{1.3.10}$$

Видно, что электрическое поле однородное и направлено перпендикулярно к плоскости. В векторном виде его можно записать следующим образом:

$$\vec{E} = 2\pi\sigma\vec{n} \tag{1.3.11}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали.

б). Поле бесконечного равномерно заряженного цилиндра (нити).

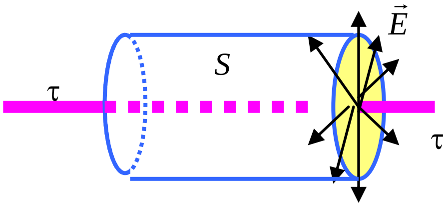

Рис. 3.9а.

Пусть имеем равномерно заряженную нить (или цилиндр) с линейной плотностью заряда τ (заряд на единицу длины $\tau = dq/dl$). В силу симметрии вектор напряженности электрического поля направлен радиально, т.е. перпендикулярно к оси нити (см рисунки 3.9). Следовательно, для определения величины электрического поля как функции расстояния от нити удобно выбрать цилиндрическую поверхность произвольного радиуса r с осью совпадающей с осью нити. Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через торцы цилиндрической поверхности равен нулю (см вид с торца на рис. 3.9б), в силу перпендикулярности векторов $\vec{E}$ и $d\vec{S}$. Таким образом в интеграле по полной поверхности остается поток вектора $\vec{E}$ только через боковую поверхность цилиндра. Последний в силу

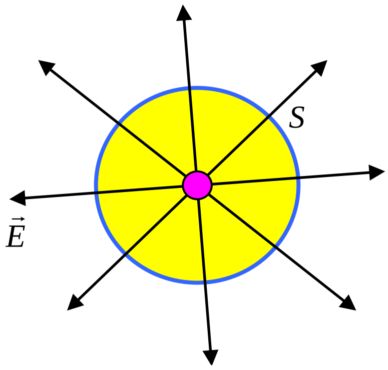

Рис.3.9б

параллельности $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ легко может быть сосчитан. Из рис. 3.9б видно, что поле имеет одинаковую величину на одном и том расстоянии от оси r. Итак, используя теорему Гаусса, имеем:

$$E \cdot 2\pi rh = 4\pi\tau h$$

где h – длина выбранной цилиндрической поверхности. Тогда получаем электрическое поле, создаваемое бесконечной, равномерно заряженной нитью на расстоянии r от оси нити:

$$E = \frac{2\tau}{r} \qquad (1.3.12)$$

Из (1.3.11) видно, что поле убывает медленнее с увеличением расстояния от нити, чем в случае точечного заряда.

Если вместо нити имеем бесконечно длинный цилиндр радиуса R, поверхность которого заряжена с поверхностной плотностью заряда σ (а внутри его объемных зарядов нет), то для напряженности электрического поля получаем:

$$\begin{aligned} r > R \qquad & E = \frac{4\pi\sigma R}{r} \\ r < R \qquad & E = 0 \end{aligned} \qquad (1.3.13)$$

Аналогично можно получить величину поля в случае заряженного цилиндра с постоянной плотностью объемного заряда как внутри, так и снаружи цилиндра.

в). Поле равномерно заряженного шара радиуса R.

Пусть имеем шар радиуса R, заряженный равномерно по всему объему с плотностью заряда ρ. Из соображений симметрии электрическое поле направлено радиально, как показано на рис. 3.10. Сначала находим поле вне шара. Для этого окружаем шар сферой радиуса $r > R$ и находим поток вектора напряженности электрического поля, который по теореме Гаусса равен полному заряду внутри сферы:

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = 4\pi r^2 E = 4\pi q \qquad (1.3.14)$$

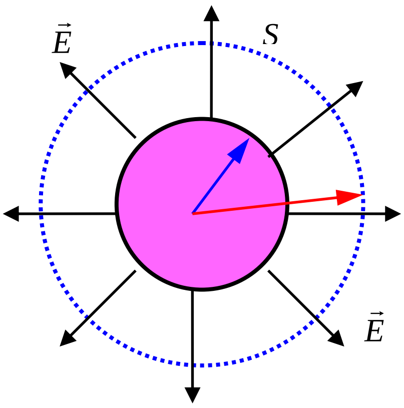

Рис. 3.10.

Откуда вне шара получаем поле, совпадающее с полем точечного заряда:

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3 \rho}{r^2} \qquad (1.3.15)$$

Для определения поля внутри шара выбираем соответствующую поверхность: сферу внутри шара $r < R$. Тогда по теореме Гаусса получаем соотношение аналогичное (1.3.14), но только в правой части стоит заряд, заключенный внутри сферы меньшего радиуса $r < R$, величина которого зависит от радиуса выбранной поверхности:

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = 4\pi r^2 E = 4\pi q_{int} = 4\pi \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

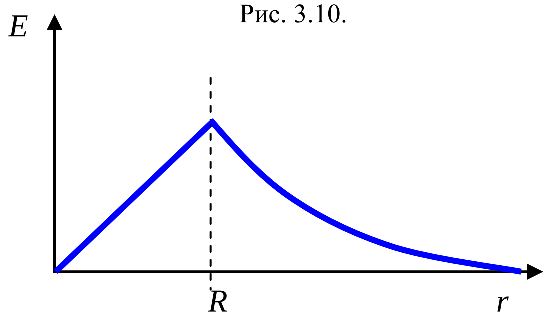

Рис. 3.11.

Получаем поле внутри равномерно заряженного шара:

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho r \qquad (1.3.16)$$

Видно, что электрическое поле пропорционально радиусу. Соотношение (1.3.16) легко записать в векторном виде, поскольку поле внутри шара направлено по радиусу:

$$\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r} \qquad (1.3.17)$$

Полная зависимость напряженности электрического поля равномерно заряженного шара от расстояния до центра изображена на рисунке 3.11.

Примечание 3. В системе *СИ* напряженности электрического поля записываются:

равномерно заряженной плоскости: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

бесконечной равномерно заряженной нити: $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$,

внутри равномерно заряженного шара: $E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r$.
