1.4. Дифференциальная форма теоремы Гаусса.

1.4.1. Дивергенция вектора $\vec{E}$ в декартовой системе координат.

Рассмотрим теорему Гаусса для бесконечно маленького объема в декартовой системе координат. Итак, *физический смысл теоремы Гаусса* состоит в следующем: источниками электрического поля, «выходящего» из замкнутой области, являются заряды, находящиеся внутри замкнутой поверхности S:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi q .$$

При этом поток вектора $\vec{E}$ и заряд могут рассматриваться как суммарная алгебраическая мощность *источников* и *стоков* поля. Если мы разделим этот поток на объем ΔV, ограниченный поверхностью S, то получим *среднюю мощность* или *удельную мощность* источников поля:

$$\frac{\oint \vec{E}d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\Phi}{\Delta V} \tag{1.4.1}$$

Удельная мощность зависит от точки, в которой считается эта мощность. Определим удельную мощность источников произвольного векторного поля $\vec{A}$ в точке P с координатами $\vec{r}(x,y,z)$ следующим образом:

$$div\vec{A} \equiv \lim_{\Delta V \to (\bullet)P} \frac{\oint \vec{A}d\vec{S}}{\Delta V} , \tag{1.4.2}$$

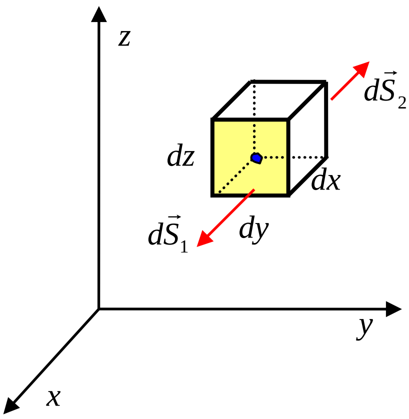

Рис. 4.1.

где $\Delta V \to (\cdot)P$ означает, что объем стягивается к точке P, а некоторый дифференциальный оператор div, действующий на вектор $\vec{A}$, носит название *дивергенции*.

Сосчитаем дивергенцию для электрического поля в декартовой системе координат (рис. 4.1). Около выбранной точки P с координатами (x,y,z) построим параллелепипед с ребрами dx, dy, dz. Электрическое поле в точке P запишем через проекции:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z \tag{1.4.3}$$

Найдем поток напряженности электрического поля через поверхность параллелепипеда, который представим в виде суммы потоков через его грани:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_6 = \sum_i \Phi_i . \tag{1.4.4}$$

Сосчитаем поток через грань 1 (см рис. 4.1), где вектор площадки $d\vec{S}_1$ направлен вдоль оси x, а по модулю равен $\left|d\vec{S}_1\right| = dy \cdot dz$. В силу малости площадки (или по теореме о среднем, если площадка больших размеров) имеем:

$$\Phi_1 = \int_1 \vec{E}d\vec{S} = \int_1 E_x dS_1 = \int_1 E_x dydz = E_x\left(x+dx,\langle y\rangle,\langle z\rangle\right)dydz , \tag{1.4.5}$$

где $(x+dx)$ – x-ая координата грани 1, а $\langle y\rangle,\langle z\rangle$ – координаты точки на грани 1, которые обеспечивают среднее значение интеграла по этой грани. Сосчитаем также поток через грань 2, которая расположена с противоположной стороны грани 1 “кубика”:

$$\Phi_2 = \int_2 \vec{E}d\vec{S} = -\int_2 E_x dS_2 = -E_x\left(x,\langle y\rangle,\langle z\rangle\right)dydz \tag{1.4.6}$$

В последнем выражении знак минус появился из-за противоположного направления вектора $d\vec{S}_2$ по отношению к оси x (рис. 4.1). Суммарный поток через обе грани 1-2 равен:

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 &= \left[E_x(x+dx,y,z) - E_x(x,y,z)\right]dydz = \\ &= \frac{\left[E_x(x+dx,y,z) - E_x(x,y,z)\right]}{dx}dxdydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}dV \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

В последнем выражении мы опустили обозначения средних значений по координатам y и z, поскольку переходим к пределу бесконечно маленьких граней выделенного параллелепипеда.

Аналогично получаем поток через пары других граней:

$$\Phi_3 + \Phi_4 = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV, \quad \Phi_5 + \Phi_6 = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV \tag{1.4.8}$$

Суммируя (1.4.7) и (1.4.8), получаем суммарный поток через поверхность маленького параллелепипеда:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV \tag{1.4.9}$$

Откуда удельная мощность источников электрического поля равна:

$$div\vec{E} = \frac{\oint_S \vec{E} d\vec{S}}{\Delta V}_{S \to (\bullet) P} \equiv \frac{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV}{dV} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{1.4.10}$$

Дивергенцией вектора $\vec{E}$ в данной точке называется предел, к которому стремится отношение потока вектора через малую произвольную поверхность ΔS, окружающую эту точку, к величине ограниченного этой поверхностью объема ΔV при $\Delta V \to 0$.

Дивергенция вектора $\vec{E}$, т.е. $div\vec{E}$, скалярная величина, как и поток Φ. Дивергенция есть оператор:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.4.11}$$

и его действие можно записать как скалярное произведение оператора градиента на вектор напряженности поля:

$$\left(\vec{\nabla}, \vec{E} \right) = div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{1.4.12}$$

Введем некоторые общие определения для произвольного векторного поля $\vec{A}$:

1). Те точки поля вектора $\vec{A}$, где $div\vec{A} > 0$, – называются *истоками поля*, при этом модуль дивергенции дает силу или мощность истока.

2). Те точки, где $div\vec{A} < 0$, – называются *стоками поля*.

3). Векторное поле, у которого во всех точках $div\vec{A} = 0$, – поле свободное от источников, иначе, *соленоидальное поле*.

В применении к электрическому полю имеем теорему Гаусса в интегральной форме (1.3.8) или (1.3.9). Разделим эти уравнения на объем ΔV и, устремляя $\Delta V \to 0$ и, стягивая этот объем к точке, получаем дивергенцию в левой части и плотность заряда в правой. Итак, *теорема Гаусса в дифференциальной форме* (для электрического поля) имеет вид:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho \tag{1.4.13}$$

Это же есть *первое уравнение в системе уравнений Максвелла* (если не рассматривать поле в веществе).

Примечание 1. В системе *СИ* теорема Гаусса в дифференциальной форме записывается: $div\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

1.4.2. Теорема Остроградского-Гаусса.

Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность S, которая ограничивает объем V. Разобьем этот объем на систему бесконечно маленьких кубиков (сечение такого объема условно показано на рис. 4.2). Для каждого i-го кубика можно записать на основании определений (1.4.1) и (1.4.2)

$$d\Phi_i = \oint_{\Delta S_i} \vec{E} d\vec{S} = div\vec{E} \cdot dV \tag{1.4.14}$$

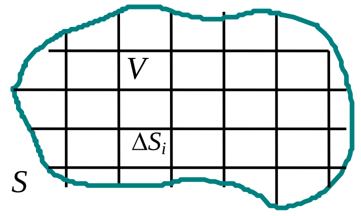

Рис. 4.2.

Сложим потоки через грани всех этих кубиков. Пусть полное число граней равно N. Отметим, что потоки вектора $\vec{E}$ через внутренние грани объема в сумме равны нулю 0, поэтому при определении суммарного потока остается интеграл только по внешней поверхности, а для дивергенции в правой части (1.4.14) – интеграл по всем кубикам:

$$\sum_{i=1}^{N} d\Phi_i = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} div\vec{E}_i \cdot dV_i = \int_V div\vec{E}dV \qquad (1.4.15)$$

Тогда получаем следующее соотношение, которое справедливо для любого векторного поля $\vec{A}$:

$$\oint_S \vec{A}d\vec{S} = \int_V div\vec{A}dV \qquad (1.4.16)$$

Это выражение представляет собой теорему Остроградского-Гаусса.

Теорема Остроградского-Гаусса: поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции вектора.

Примечание 2. *Теорема Ирншоу* утверждает, что совокупность неподвижных частиц, взаимодействующих между собой с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния (притягивающихся или отталкивающихся), не может образовывать устойчивой равновесной системы. Т.е. всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных электрических зарядов неустойчива в отсутствие других сил, кроме кулоновских.

Она является следствием теоремы Гаусса. В самом деле, если на рассматриваемый заряд q действует сила со стороны других зарядов, но этот заряд находится в равновесии, то суммарная сила равна 0 и, следовательно, поток вектора E через поверхность окружающую заряд равен нулю 0. При устойчивом равновесии при смещении заряда должна возникать возвращающая сила, т.е. должен возникнуть поток вектора напряженности электрического поля, отличный от 0, что противоречит теореме Гаусса. Или иначе, необходимым условием устойчивого равновесия системы является наличие минимума потенциальной энергии. Но потенциальная энергия статической системы зарядов не может иметь минимума.
