1.5. Работа сил электростатического поля. Циркуляция вектора.

1.5.1. Работа электрического поля. Циркуляция вектора.

По определению работа электрических сил по перемещению точечного заряда q_0 из точки 1 в точку 2 записывается:

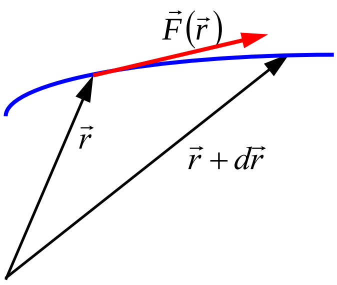

Рис. 5.1.

$$A_{12}=\int_1^2\vec{F}(\vec{r})d\vec{r}=\int_1^2 q_0\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}=q_0\int_1^2\vec{E}(\vec{r})d\vec{r} \qquad (1.5.1)$$

Для точечного заряда напряженность поля равна $\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}$, и тогда работа по перемещению заряда q_0 в поле неподвижного точечного заряда равна:

$$A_{12}=q_0\int_1^2\frac{q\vec{r}d\vec{r}}{r^3}=q_0q\int_1^2\frac{dr}{r^2}=q_0\left(\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2}\right)=E_{\text{пот1}}-E_{\text{пот2}}= \qquad (1.5.2)$$
$$=W_1-W_2=q_0(\varphi_1-\varphi_2)$$

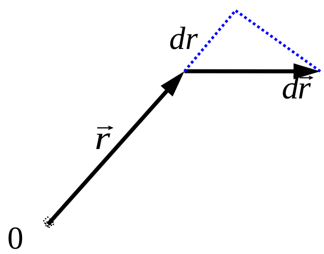

Рис. 5.2.

Здесь мы использовали, что скалярное произведение равно $\vec{r}d\vec{r}=rdr$ (см рис. 5.2), где dr – приращение длины вектора $\vec{r}$. И ввели потенциальную энергию $E_{\text{пот}}$. Потенциальную энергию в теории электромагнитных полей будем обозначать через W. Здесь φ – *потенциал электростатического поля – энергетическая характеристика поля*

$$\varphi=\frac{W}{q_0}$$

Подробнее потенциал рассмотрим в следующем параграфе.

Поскольку работа электростатических сил не зависит от пути, то электрическое поле потенциально. Из принципа суперпозиции следует, что свойство потенциальности справедливо для электрического поля любой системы неподвижных зарядов.

Вследствие потенциальности электрического поля работа его сил по замкнутому контуру равна нулю, т.е. можно записать:

$$\oint_L\vec{E}d\vec{r}=\oint_L\vec{E}d\vec{l}=0, \qquad (1.5.3)$$

где $d\vec{r}=d\vec{l}$ – элемент контура, по которому ведется интегрирование. Это одно из фундаментальных уравнений электростатики (часть более общего уравнения Максвелла). О соотношении (1.5.3) говорят, что *циркуляция вектора* электростатического поля по замкнутому контуру равна 0 (*теорема о циркуляции*).

Общее определение для произвольного вектора: *векторное поле называется потенциальным, если циркуляция этого вектора по любому замкнутому контуру равна* 0.

1.5.2. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора.

Пусть имеем векторное поле

$$\vec{E}(\vec{r})=E_x(\vec{r})\vec{e}_x+E_y(\vec{r})\vec{e}_y+E_z(\vec{r})\vec{e}_z.$$

$$\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z$$

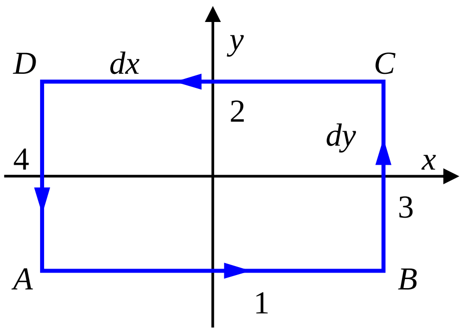

Рис. 5.3.

Циркуляцию вектора $\vec{E}$ по некоторому замкнутому контуру L обозначим через величину $C(\vec{E})$:

$$\oint_L\vec{E}(\vec{r})d\vec{l}=C(\vec{E}) \qquad (1.5.4)$$

Чтобы получить запись теоремы о циркуляции в дифференциальной форме, рассмотрим бесконечно малый контур на плоскости (x,y), так что ось z смотрит из плоскости на нас (см рис. 5.3). Контур $ABCD$ – мал, его обход выбран так, что вектор обойденной площадки направлен вдоль оси z. Иначе, по выбранному направлению обхода на рис. 5.3 по правилу “буравчика” направление вектора площадки $\Delta\vec{S}$ смотрит на нас из плоскости рисунка. Значение и направление вектора поля $\vec{E}$ можно считать постоянными на малых отрезках dx и dy (или берем средние величины этих векторов). Тогда циркуляция вектора $\vec{E}$ по малому контуру $ABCD$ может быть записана в виде суммы по сторонам 1, 2, 3 и 4:

$$\oint_{ABCD} \vec{E}d\vec{l} = \sum_{i=1,2,3,4} \vec{E}_i d\vec{l}_i = E_{1x}dx + E_{3y}dy + (-E_{2x}dx) + (-E_{4y}dy) \tag{1.5.5}$$

Минус в двух последних слагаемых появился из-за того, что приращения dx и dy отсчитываются в другую сторону по отношению к положительному направлению осей x и y. Рассмотрим отдельно слагаемые на отрезках 1 и 2:

$$(E_{1x} - E_{2x})dx = \frac{E_{1x} - E_{2x}}{dy} dydx = -\frac{\partial E_x}{\partial y} dxdy = -\frac{\partial E_x}{\partial y} dS \tag{1.5.6}$$

Здесь dS – элемент площадки, ограниченной контуром $ABCD$. Аналогично на отрезках 3 и 4 получаем:

$$(E_{3y} - E_{4y})dy = \frac{\partial E_y}{\partial x} dS \tag{1.5.7}$$

Итак, по полному выбранному бесконечно малому контуру $ABCD$ получаем:

$$dC_z(\vec{E}) = \oint_{ABCD} \vec{E}d\vec{l} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dS \tag{1.5.8}$$

Напомним, что элемент площадки dS лежит в плоскости (x,y) и, учитывая направление обхода этой площадки, можно рассматривать, что в (1.5.8) $dS = dS_z$ представляет собой *проекцию вектора элементарной площадки* на ось z, а выражение в скобках – тоже как проекцию на эту же ось. Это обстоятельство обозначим значком z в величине циркуляции – dC_z .

Можно выбрать маленькие площадки, перпендикулярные к осям $0x$ и $0y$. Определяя циркуляцию вектора $\vec{E}$ по контурам этих малым площадок, получаем совершенно аналогично:

$$dC_x(\vec{E}) = \oint_L \vec{E}d\vec{l} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)dzdy \tag{1.5.9}$$

$$dC_y(\vec{E}) = \oint_L \vec{E}d\vec{l} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)dxdz \tag{1.5.10}$$

Каждое из выражений (1.5.8) – (1.5.10) можно рассматривать как соответствующие слагаемые скалярного произведения 2-х векторов: 1) некоего дифференциального вектора, компоненты которого представлены частными производными в скобках, и 2) вектора малой площадки

$$d\vec{S} = dS_x\vec{e}_x + dS_y\vec{e}_y + dS_z\vec{e}_z = \vec{e}_x dydz + \vec{e}_y dzdx + \vec{e}_z dxdy\,.$$

Назовем этот дифференциальный вектор *ротором вектора* $\vec{E}$ и определим его следующим образом

$$rot\vec{E} \equiv \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \tag{1.5.11}$$

Итак, сумму выражений (1.5.8) - (1.5.10) можно представить в виде скалярного произведения векторов

$$rot\vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)dS_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right)dS_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dS_z \tag{1.5.12}$$

Иначе это скалярное произведение можно записать в следующем виде

$$\left(rot\vec{E}, d\vec{S}\right) = rot_n\vec{E} \cdot dS\,, \tag{1.5.13}$$

Выражение (1.5.13), исходя из общего определения потока вектора, есть не что иное, как поток вектора $rot\vec{E}$ через площадку dS . Тогда нормальную (по отношению к малой поверхности ΔS) составляющую вектора ротора определяем следующим образом:

$$rot_n \vec{E} = \lim_{\Delta S \to 0, L \to 0} \frac{\oint\limits_L \vec{E} d\vec{l}}{\Delta S} \qquad (1.5.14)$$

Итак, рассматривая бесконечно маленький замкнутый контур вокруг выбранной точки векторного поля, можно определить нормальную составляющую вектора ротора. Эта составляющая в данной точке представляет собой отношение циркуляции этого вектора по этому малому контуру и бесконечно малой площади, охватываемой этим контуром.

Иная запись ротора как вектора – через векторное произведение вектора оператора градиента и вектора напряженности электрического поля:

$$rot\vec{E} = \left[\hat{\vec{\nabla}}, \vec{E}\right] = \left[\left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right), \left(E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z\right)\right] \qquad (1.5.15)$$

Частные производные берутся от тех величин и функций, которые стоят справа от оператора. Векторное произведение или ротор можно также записать через детерминант:

$$rot\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \qquad (1.5.16)$$

Вернемся к свойствам электростатического поля. Поскольку для электрического поля циркуляция по любому контуру равна 0, то исходя из (1.5.14) ротор вектора электрической напряженности также равен 0. Итак, для электрического (электростатического) поля имеем:

$$rot\vec{E} = 0 \qquad (1.5.17)$$

Это одно из уравнений системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме для электрического статического (не зависящего от времени) поля.

1.5.3. Теорема Стокса.

Рассмотрим циркуляцию произвольного вектора $\vec{A}$ по контуру L, ограничивающему поверхность S. Разобьем поверхность на маленькие площадки и сосчитаем поток вектора ротора $\vec{A}$ через малую i -ую площадку. Из полученных формул (1.5.13) и (1.5.14) имеем:

$$\left(rot\vec{A}, \Delta\vec{S}_i\right) = rot_n \vec{A} \cdot \Delta S_i = \oint\limits_{L_i} \vec{A} d\vec{l} \qquad (1.5.18)$$

Просуммируем поток вектора $rot\vec{A}$ (1.5.18) по всем площадкам, окруженным внешним контуром L. Учтем, что в интегралах по контурам L_i каждая внутренняя линия сетки проходится дважды (см рис. 5.4), но только в противоположных направлениях, и, следовательно, их вклад в сумме по всем площадкам сокращается. Это означает, что в результате суммирования по площадкам в правой стороне равенства остается интеграл только по внешнему контуру L, ограничивающему площадку S:

$$\sum_i \left(rot\vec{A}, \Delta\vec{S}_i\right) = \sum_i \oint\limits_{L_i} \vec{A} d\vec{l} = \oint\limits_L \vec{A} d\vec{l} \qquad (1.5.19)$$

Переходя к пределу $\Delta S_i \to 0$, получаем *теорему Стокса*:

$$\int\limits_S rot\vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint\limits_L \vec{A} \cdot d\vec{l} \qquad (1.5.20)$$

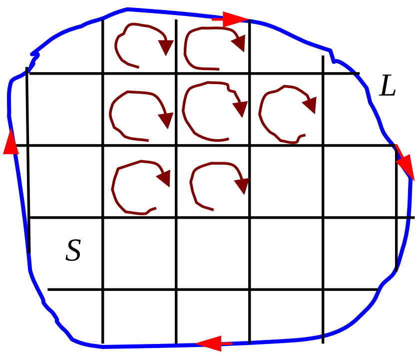

Рис. 5.4.

Теорема Стокса звучит следующим образом: *циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через площадку, ограниченную этим контуром*.

Теорема Стокса применима к любым векторным полям, поэтому такое же выражение, записанное для вектора напряженности электрического поля, имеет вид:

$$\oint\limits_L \vec{E} d\vec{l} = \int\limits_S rot\vec{E} d\vec{S} \qquad (1.5.21)$$

Но важно отметить, что для *электростатического поля* имеем уравнения (1.5.3) и (1.5.17), следовательно, левая и правая части уравнения (1.5.21) равны нулю

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S rot\vec{E}d\vec{S} = 0 \qquad (1.5.22)$$

Итак, понятие потенциала можно вводить для таких векторных полей, для которых циркуляция вектора по замкнутому контуру или его ротор равен нулю.