1.6. Потенциал электростатического поля.

1.6.1. Потенциал.

В предыдущем параграфе получили выражение для работы по перенесению заряда q_0 из точки r_1 в точку r_2 в поле неподвижного точечного заряда q:

$$A_{12} = q_0\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = W_1 - W_2, \quad (1.6.1)$$

где потенциальная энергия заряда W в электрическом поле определяется через *потенциал* φ:

$$W = q_0\varphi \quad (1.6.2)$$

Разность потенциалов между двумя пространственными точками можно записать:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{r} \quad (1.6.3)$$

Потенциал – *энергетическая характеристика электрического поля*. Потенциал поля, как и потенциальная энергия, определяется с точностью до постоянной величины. Так, потенциал поля точечного заряда в точке, находящейся на расстоянии r от заряда, имеет вид:

$$\varphi = \frac{q}{r} + const \quad (1.6.4)$$

Обычно константу выбирают так, чтобы на бесконечности $(r \to \infty)$ потенциал равнялся нулю, т.е.

$$\varphi = \frac{q}{r} \quad (1.6.5)$$

Напомним, что определение потенциала с точностью до постоянной величины никак не сказывается при описании взаимодействия между зарядами, поскольку физическое значение имеет только разность потенциалов.

Примечание 1. В системе *СИ* потенциал поля точечного заряда записывается $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Из принципа суперпозиции следует, что свойство потенциальности справедливо для электрического поля любой системы или конфигурации неподвижных зарядов. Тогда потенциал поля системы зарядов в выбранной точке P (рис. 6.1) определяется:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (1.6.6)$$

где r_i – расстояние от начала системы отсчета до выбранного i-го заряда, $\vec{r}$ – координата точки наблюдения (рис. 6.1), $|\vec{r} - \vec{r}_i|$ – расстояние от точки наблюдения до выбранного заряда.

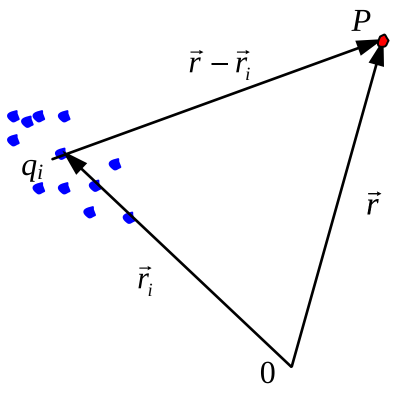

Рис. 6.1.

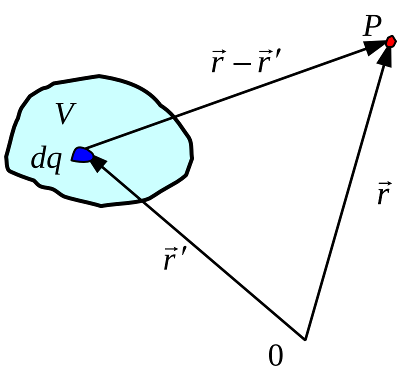

Рис. 6.2.

В случае непрерывного распределения заряда потенциал в точке наблюдения определяется через интегралы по поверхности или объему, где существует распределение зарядов. Тогда имеем 2 случая:

а) если имеется объемная плотность заряда $\rho = \rho(\vec{r}\,')$ (см рис. 6.2), то потенциал равен интегралу по объему, где имеются заряды

$$\varphi = \int\limits_V \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (1.6.7)$$

б) если имеется поверхностная плотность заряда $\sigma = \sigma(\vec{r}\,')$, то потенциал выражается через интеграл по поверхности

$$\varphi = \int\limits_S \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \int\limits_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')dS'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \qquad (1.6.8)$$

Напомним, что потенциал скалярная величина и в формулах (1.6.6) - (1.6.8) имеем алгебраическое сложение вклада от положительных и отрицательных зарядов.

Единицы потенциала электрического поля.

В системе *CGSE* единица потенциала выбирается исходя из формулы (1.6.5) – $1CGSE_{\varphi}$, при этом $1CGSE_{\varphi} = 1\ CGSE_{q}\ /\ см$.

В системе *СИ* единица потенциала есть *Вольт*: 1 *В* = 1 *Дж·Кл*$^{-1}$. Связь между этими единицами имеет вид:

$$1\ CGSE_{\varphi} = 300\ B$$

Отметим, что единица потенциала в системе *CGSE* существенно больше единицы потенциала в Вольтах.

1.6.2. Связь напряженности и потенциала. Уравнение Пуассона.

Из курса механики мы знаем, что сила есть градиент от потенциальной энергии

$$\vec{F} = -gradW \qquad (1.6.9)$$

Пользуясь определениями (1.6.1)-(1.6.2), получаем связь между потенциалом и напряженностью поля:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi \qquad (1.6.10)$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (1.6.10) и воспользуемся представлением, что дивергенция от вектора есть ничто иное, как скалярное произведение оператора градиента на этот вектор:

$$div\vec{E} \equiv (\vec{\nabla}, \vec{E}) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\varphi \equiv -div(grad\varphi)$$

Далее воспользуемся теоремой Гаусса для вектора $\vec{E}$ в дифференциальной форме (1.4.13), тогда получаем:

$$(\vec{\nabla}, \vec{E}) = 4\pi\rho = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\varphi \qquad (1.6.11)$$

Распишем подробнее скалярное произведение двух операторов градиента и введем *оператор Лапласа* Δ:

$$(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \Delta \qquad (1.6.12)$$

Итак, получаем *уравнение Пуассона*, определяющее связь между распределением заряда и потенциалом:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \qquad (1.6.13)$$

Или в подробной записи имеем:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho \qquad (1.6.14)$$

Это одно из основных уравнений электростатики, с помощью которого определяется потенциал электрического поля по заданному распределению (плотности) заряда.

В физике часто строятся поверхности постоянного потенциала – так называемые, *эквипотенциальные поверхности*. Силовые линии электрического поля направлены перпендикулярно к эквипотенциальным поверхностям.

Примечание 2. В системе *СИ* уравнение Пуассона записывается $\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0$

1.6.3. Примеры вычисления потенциала.

А. Вычислим потенциал, создаваемый шаром радиуса R, и равномерно заряженным с объемной плотностью заряда ρ. Будем вычислять потенциал $\varphi(\vec{r})$ как работу по перенесению единичного заряда из бесконечности в точки, расположенные вне ($r > R$) и внутри ($r < R$) заряженного шара. В §1.3 получили, что напряженность электрического поля вне равномерно заряженного шара равна

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3 \rho}{r^2},$$

а напряженность электрического поля внутри шара равна:

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho r$$

Работа по перенесению единичного заряда из бесконечности (где поле равно 0) в точку вне шара $r > R$ мы уже определяли ранее и она равна:

$$A_{\infty r} = \varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} Edr = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{r^2}dr = \frac{q}{r} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{r} \qquad \text{при} \quad r > R \qquad (1.6.15)$$

Таким образом, вне шара и на его поверхности получаем выражение для потенциала такое же как для потенциала точечного заряда, сосредоточенного в центре шара. В частности при $r = R$ имеем

$$\varphi(r = R) = \frac{q}{R}.$$

Для определения потенциала внутри шара к работе по перенесению заряда из бесконечности до поверхности шара необходимо добавить работу сил электрического поля от его поверхности до точки внутри шара $r < R$. Сосчитаем эту работу, подставляя напряженность электрического поля внутри шара:

$$A_{Rr} = -\int_{R}^{r} \vec{E}d\vec{r} = -\frac{4}{3}\pi\rho\int_{R}^{r} rdr = -\frac{4}{3}\pi\rho\frac{r^2 - R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \frac{R^2 - r^2}{2R^3} = \frac{q}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right) \qquad (1.6.16)$$

Итак, потенциал поля заряженного шара внутри его равен:

$$\varphi(r) = \frac{q}{R} + \frac{q}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \text{при} \quad r < R \qquad (1.6.17)$$

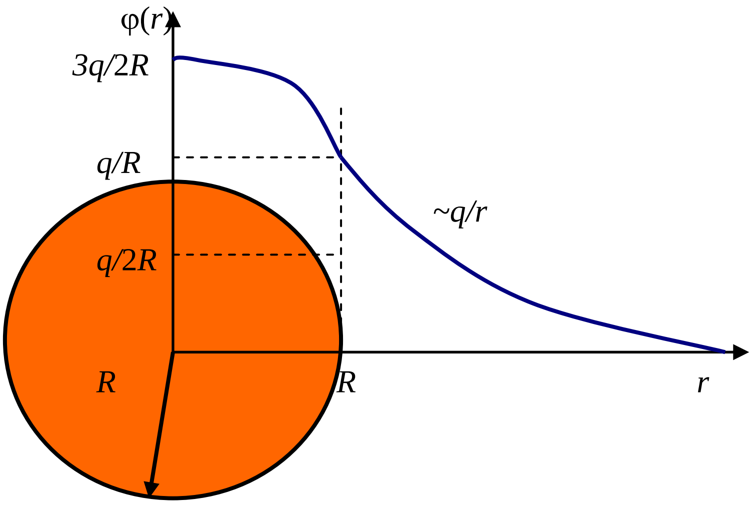

Рис. 6.3

Примерная зависимость $\varphi(r)$ потенциала от расстояния до центра заряженного шара представлена на рис. 6.3.

Б. Сосчитаем потенциал в центре полусферы радиуса R, если ее поверхность заряжена с постоянной поверхностной плотностью электрического заряда $\sigma = const$. В этом случае сосчитаем потенциал как алгебраическую сумму потенциалов, создаваемых точечными зарядами. Таким образом мы находим потенциал с точностью до постоянной.

Выберем элемент поверхности dS, находящийся под углом θ к оси симметрии (см рис. 6.4) и под углом φ к произвольно направленной оси x и имеющий заряд

$$dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Рассматривая этот заряд как точечный, запишем его вклад в потенциал в центре полусферы:

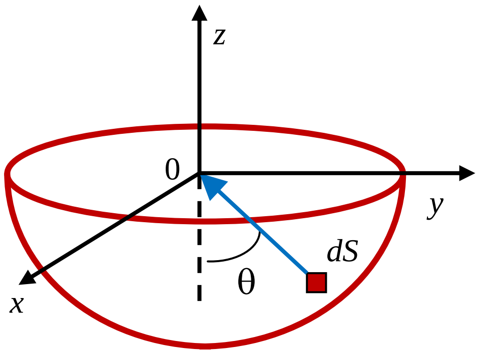

Рис. 6.4

$$d\varphi = \frac{\sigma dS}{R} = \sigma R \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \qquad (1.6.18)$$

Интегрируя по всей поверхности полусферы, получаем полный потенциал:

$$\varphi = R\sigma \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\sigma R \qquad (1.6.19)$$

Если известен полный (и равномерно распределенный) заряд на полусфере,

$$q = 2\pi R^2 \sigma$$

то можно получить простой и вполне очевидный результат для потенциала, создаваемый полусферой:

$$\varphi = \frac{q}{R} \qquad (1.6.20)$$

Отметим, что мы суммировали потенциалы, создаваемые точечными зарядами, для которых потенциал на бесконечности равен нулю. Поэтому и окончательный результат (1.6.20) также определяет потенциал в точке 0 относительно потенциала на бесконечности, равного нулю.

Если имеется неравномерное распределение заряда по поверхности, то необходимо сосчитать соответствующие интегралы в (1.6.19). Определение потенциала в других точках производится численным интегрированием по всей поверхности полусферы.