1.7. Потенциал и напряженность поля системы точечных зарядов.

1.7.1.Потенциал и напряженность поля электрического диполя.

Точечный *электрический диполь* – система 2-х одинаковых по величине, но разных по знаку, точечных зарядов, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до точки, где определяется поле системы. Вектор $\vec{l}$ проводится от отрицательного заряда к положительному заряду (рис. 7.1). Так же направлен *электрический дипольный момент*, который определяется:

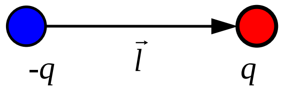

Рис. 7.1.

$$\vec{p} = q\vec{l} \qquad (1.7.1).$$

В силу аксиальной (осевой) симметрии достаточно находить электрическое поле в плоскости, проходящей через вектор $\vec{l}$ (например, в плоскости рисунка 7.2). Введем полярные координаты (r,θ): r – расстояние от центра диполя до точки измерения поля, θ – угол между вектором дипольного момента $\vec{p} = q\vec{l}$ и направлением на точку наблюдения (·)A – вектором $\vec{r}$ (рис. 7.2).

Рассмотрим ситуацию, когда расстояние от диполя до точки измерения поля значительно больше расстояния между зарядами в самом диполе: $r >> l$. Последнее неравенство определяет понятие *точечного диполя*. Тогда расстояния от положительного r_+ и отрицательного r_- зарядов до точки наблюдения A могут быть записаны в виде:

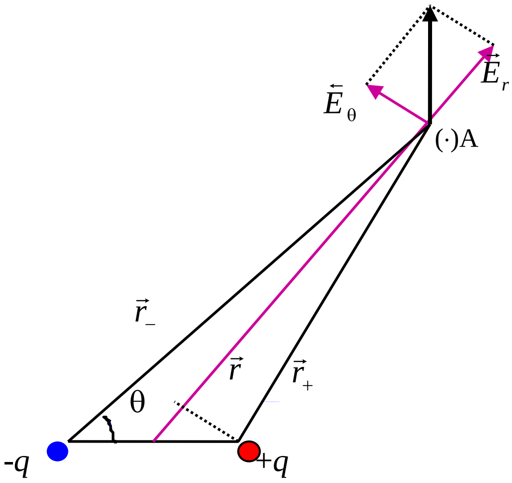

Рис. 7.2.

$$\begin{aligned} r_+ &\approx r - \frac{l}{2}\cos\theta = r - \frac{\vec{l}}{2}\vec{e}_r \\ r_- &\approx r + \frac{l}{2}\cos\theta = r + \frac{\vec{l}}{2}\vec{e}_r \end{aligned}, \qquad (1.7.2)$$

где $\vec{e}_r$ – единичный вектор (орт) вдоль направления $\vec{r}$. Сосчитаем потенциал поля диполя в этой точке:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} = q\frac{r_- - r_+}{r_- r_+} \qquad (1.7.3)$$

При $r >> l$ можно приближенно записать $r_+ r_- \approx r^2$ и затем, подставляя (1.7.2), получаем:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{2q\dfrac{\vec{l}\vec{e}_r}{2}}{r^2} = \frac{\vec{p}\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} \qquad (1.7.4)$$

или иначе

$$\varphi(r,\theta) = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{p\cdot\cos\theta}{r^2} \qquad (1.7.5)$$

Из (1.7.5) видно, что потенциал диполя быстрее убывает с расстоянием, чем потенциал точечного заряда. Очевидно, что это связано с взаимной экранировкой разных по знаку зарядов диполя.

Теперь сосчитаем напряженность поля электрического диполя, воспользовавшись связью между потенциалом и напряженностью поля:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial\varphi}{\partial l_\theta}\vec{e}_\theta\right) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right) \qquad (1.7.6)$$

где $\vec{e}_\theta$ – единичный вектор, перпендикулярный к направлению $\vec{r}$ (для точечного диполя по касательной к окружности радиуса r). Так как электрическое поле можно разложить на составляющие: $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$ (см рис. 7.2), то компоненты вектора поля равны:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p\cdot\cos\theta}{r^3}, \quad E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{p\cdot\sin\theta}{r^3} \qquad (1.7.7)$$

Задавая различные координаты точки r и θ, можно получить силовые линии поля диполя в плоскости, проходящей через ось диполя. В частности, вдоль оси диполя отлична от нуля только радиальная компоненте E_r. В точках на прямой, проходящей через центр диполя перпендикулярно к его оси, отлична от нуля только касательная составляющая поля E_θ (см рис. 2.5 в §1.2).

Модуль вектора напряженности равен:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$E = \frac{p}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta} \qquad (1.7.8)$$

Проекции вектора напряженности электрического поля и его величина зависят от расстояния до диполя и угла между направлением наблюдения и направлением дипольного момента. Можно представить вектор напряженности в следующей полезной форме:

$$\vec{E} = \frac{2p\cdot\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{p\cdot\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta = \frac{3p\cdot\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r - \frac{p\cdot\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{p\cdot\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta = \frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E} = \frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \qquad (1.7.9)$$

При выводе (1.7.9) мы воспользовались тем, что разложение дипольного момента по ортам $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\theta$ имеет вид

$$\vec{p} = p\cdot\cos\theta\,\vec{e}_r - p\cdot\sin\theta\,\vec{e}_\theta. \qquad (1.7.10)$$

1.7.2. Диполь во внешнем электрическом поле.

1) Однородное внешнее поле:

Поместим диполь во внешнее однородное поле. Полная сила, действующая на диполь, очевидно, равна нулю (см рис. 7.3), из-за того, что силы, действующие на каждый из зарядов, различны по знаку, но одинаковы по модулю:

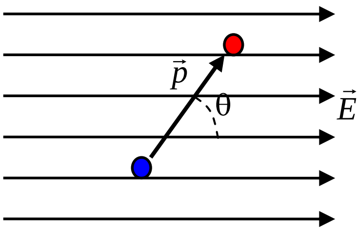

Рис. 7.3.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0. \qquad (1.7.11)$$

Поэтому диполь в однородном поле не смещается. Однако на диполь действует пара сил на расстоянии $l\sin\theta$ (плечо пары сил), где угол θ – угол между направлением вектора напряженности поля и дипольным моментом. Следовательно, момент силы, стремящийся повернуть дипольный момент вдоль направления поля, отличен от нуля:

$$\vec{M} = \left[\vec{p},\vec{E}\right] \qquad (1.7.12)$$

Наиболее устойчивое положение диполя возникает тогда, когда вектор дипольного момента $\vec{p} = q\vec{l}$ направлен вдоль вектора напряженности электрического поля.

2) Неоднородное внешнее поле (см рис. 7.4):

В неоднородном внешнем электрическом поле силы в разных точках диполя различны и поэтому суммарная сила, действующая на диполь, не равна нулю: $\left|\vec{F}_1\right| \neq \left|\vec{F}_2\right|$ и $\vec{F} \neq 0$. Силу можно определить, вычисляя градиент потенциальной энергии: $\vec{F} = -\nabla W$.

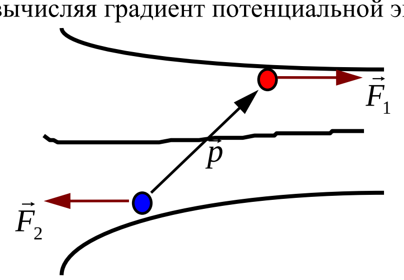

Рис. 7.4.

Энергия диполя в электрическом поле определяем по сумме энергий каждого из зарядов (здесь исключается внутренняя энергия диполя как целого, т.е. его энергия связи):

$$W = q\varphi_+ - q\varphi_- = q\left(\varphi_+ - \varphi_-\right) = q\Delta\varphi \qquad (1.7.13)$$

Считая расстояние между зарядами диполя l достаточно малой величиной (как малое приращение, что есть дифференциал), можно записать:

$$q\Delta\varphi = -q\left(\vec{E},\vec{l}\right) = -\left(\vec{p},\vec{E}\right)$$

Таким образом, потенциальная энергия взаимодействия диполя с электрическим полем записывается в виде:

$$W = -\left(\vec{p},\vec{E}\right) \qquad (1.7.14)$$

Выражение (1.7.14) определяет энергию точечного диполя в любом электрическом поле. Оно только не учитывает энергию взаимодействия зарядов между собой, т.е. собственную энергию диполя.

Сила, действующая на диполь в целом, определяется как градиент потенциальной энергии:

$$\vec{F} = -\nabla W = \nabla\left(\vec{p},\vec{E}\right) \tag{1.7.15}$$

Для вычисления градиента от скалярного произведения векторов воспользуемся известной формулой векторного анализа:

$$\nabla\left(\vec{A},\vec{B}\right) = \left(\vec{A},\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{B},\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \left[\vec{A},rot\vec{B}\right] + \left[\vec{B},rot\vec{A}\right] \tag{1.7.16}$$

Подставляя вместо $\vec{A}$ и $\vec{B}$ вектора $\vec{p}$ и $\vec{E}$, соответственно, видно, что все слагаемые кроме одного (первого) равны 0. В самом деле, $\left(\vec{E},\vec{\nabla}\right)\vec{p} = 0$ и $\left[\vec{E},rot\vec{p}\right] = 0$ из-за того, что дипольный момент $\vec{p}$ есть постоянная величина; а векторное произведение $\left[\vec{p},rot\vec{E}\right] = 0$ равно нулю из-за того, что $rot\vec{E} = 0$. Таким образом, получаем выражение для силы, действующей на точечный диполь

$$\vec{F} = \left(\vec{p},\vec{\nabla}\right)\vec{E} \tag{1.7.17}$$

Рассмотрим в качестве примера частный случай – пусть ось x направлена вдоль вектора дипольного момента $\vec{p}$ $(p = p_x, p_y = p_z = 0)$, тогда получаем для силы более простое выражение:

$$\vec{F} = p\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} \tag{1.7.18}$$

Как видно из (1.7.18), сила, действующая на диполь в неоднородном поле, направлена в сторону возрастания электрического поля. Таким образом, диполь «втягивается» в область более сильного электрического поля.

1.7.3. <u>Система зарядов на больших расстояниях</u>.

Рассмотрим систему из N зарядов q_i, находящихся внутри области с линейными размерами $\sim l$ (см рис. 7.5). Найдем электрическое поле, создаваемое системой этих зарядов, на больших расстояниях $r >> l$. Потенциал, создаваемый системой на расстоянии r, определяется суммой потенциалов от каждого заряда:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|} \tag{1.7.19}$$

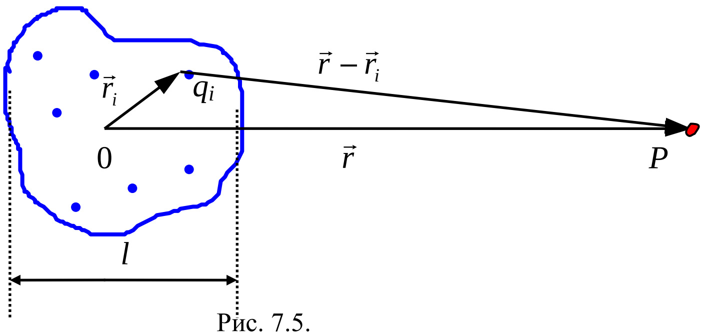

Рис. 7.5.

где вектора $\vec{r}$ и $\vec{r}_i$ отсчитываются от начала координат, помещенного внутри области. Учтем, что $\left|\vec{r}_i\right| << \left|\vec{r}\right|$, и знаменатель в (1.7.19) приближенно запишем в виде:

$$\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right| \approx r - \vec{r}_i\vec{e}_r = r\left(1-\frac{\vec{r}_i\vec{e}_r}{r}\right) \tag{1.7.20}$$

где $\vec{e}_r$ – орт, направленный вдоль вектора $\vec{r}$. Тогда, учитывая также, что при $x << 1$ имеем следующее разложение дроби

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots,$$

разложение потенциала будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r}\left(1+\frac{\vec{r}_i\vec{e}_r}{r}+\left(\frac{\vec{r}_i\vec{e}_r}{r}\right)^2+\ldots\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}q_i}{r} + \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{N}q_i\vec{r}_i,\vec{e}_r\right)}{r^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}q_i\left(\vec{r}_i,\vec{e}_r\right)^2}{r^3} + \ldots \tag{1.7.21}$$

Обсудим отдельные слагаемые в (1.7.21). Первое слагаемое описывает потенциал точечного заряда, величина которого определяется алгебраической суммой всех зарядов системы $\sum\limits_i q_i$, или, иначе говоря, описывает поле *монополя*:

$$\varphi_{mon}(\vec{r}) = \frac{\sum_i q_i}{r} \qquad (1.7.22)$$

Во 2-ом слагаемом можно выделить дипольный электрический момент системы зарядов:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r}_i \qquad (1.7.23)$$

Таким образом, 2-ое слагаемое описывает потенциал, создаваемый *дипольным моментом системы зарядов*:

$$\varphi_{dip} = \frac{\vec{p}\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} \qquad (1.7.24)$$

Если система электронейтральна, т.е. сумма всех зарядов равна нулю $\sum_i q_i = 0$, то поле создается только дипольным моментом системы. Интересно отметить, что дипольный момент не зависит от начала отсчета. В самом деле, пусть имеется 2 системы с началом координат $(\cdot)0$ и $(\cdot)0'$, отстоящие на расстояние b, тогда: $\vec{r}\,'_i = \vec{b} + \vec{r}_i$ и поскольку $\sum_i q_i = 0$ имеем:

$$\vec{p}\,' = \sum_i q_i \vec{r}_i\,' = \sum_i q_i\left(\vec{r}_i + \vec{b}\right) = \vec{b}\sum_i q_i + \sum_i q_i \vec{r}_i = \vec{p} \qquad (1.7.24)$$

Если суммарный заряд системы не равен нулю $\sum_i q_i \neq 0$, то основной вклад при больших расстояниях дает поле заряда – *монополь*. Если система электронейтральна $\sum_i q_i = 0$, то основной вклад в электрическое поле системы зарядов происходит от дипольного момента системы. Если полный заряд и дипольный момент системы равны нулю:

$$\sum_i q_i = 0 \text{ и } \sum_i q_i \vec{r}_i = 0,$$

то основной вклад дают другие *мультипольные моменты*: в первую очередь – *квадруполь* $\varphi \sim \frac{1}{r^3}$.

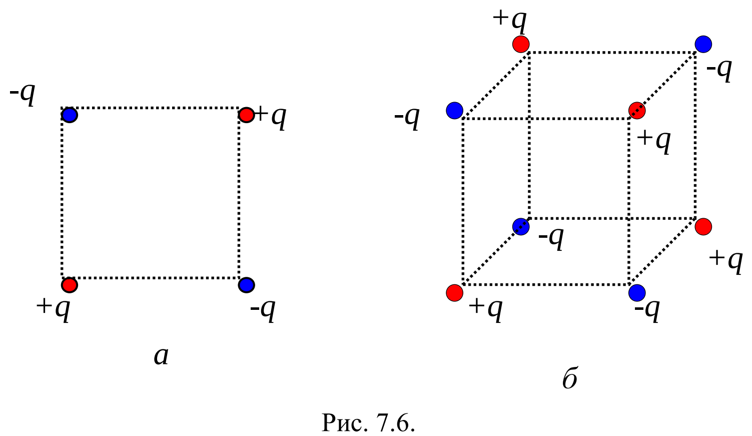

Рис. 7.6.

На рис. 7.6 *а* приведен пример системы 4-х зарядов, для которой полный заряд и дипольный момент равны 0, однако система имеет отличный от нуля квадрупольный момент. Поэтому такая система зарядов создает электрическое поле, определяемое третьим слагаемым в уравнении (1.7.21). Пример системы зарядов, для которой монополь, диполь и квадруполь равны нулю, а *октупольный момент* отличен от нуля, показан на рисунке 7.6*б*. При этом потенциал, создаваемый такой системой зарядов, обратно пропорционален четвертой степени расстояния $\varphi \sim 1/r^4$.

Такое разложение поля системы зарядов называется разложением по *мультиполям*. Его можно провести и для непрерывного распределения зарядов. Физики, занимающиеся исследованием структуры атомов, молекул, кластеров, а также элементарных частиц, ищут их мультипольные моменты. В частности, экспериментально осуществляется поиск дипольного момента нейтрона.