## 2.3. Вектор электрической индукции.

2.3.1. Вектор электрической индукции.

Поляризационные заряды $q'$ – это такие же обычные заряды, как и заряды $q$, и они также являются источником электрического поля. Поэтому теорема Гаусса для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ должна включать как сторонние, так и связанные заряды:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi(q + q') \tag{2.3.1}$$

Записывая теорему Гаусса в дифференциальной форме, имеем:

$$div\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho'), \tag{2.3.2}$$

где $q$ – сторонний заряд, $\rho$ – плотность сторонних зарядов, $q'$ – связанный заряд и $\rho'$ – плотность связанных зарядов. Эти формулы могут быть переписаны через вектор поляризации $\vec{P}$. Выразив плотность связанных зарядов $\rho'$ через $div\vec{P}$ из формул (2.2.8) и (2.2.12) предыдущего параграфа, перепишем уравнение (2.3.2) в следующем виде:

$$div\vec{E} = -4\pi div\vec{P} + 4\pi\rho \tag{2.3.3}$$

$$div\left(\vec{E} + 4\pi\vec{P}\right) = 4\pi\rho \tag{2.3.4}$$

Или в интегральной форме получаем аналогично:

$$\oint_S \left(\vec{E} + 4\pi\vec{P}\right)d\vec{S} = 4\pi q \tag{2.3.5}$$

Введем новый вектор – *вектор электрической индукции* $\vec{D}$, или вектор *электрического смещения*, с помощью следующего соотношения:

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P} \tag{2.3.6}$$

Тогда уравнения (2.3.4) и (2.3.5) записываются в более короткой форме:

$$div\vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi q \tag{2.3.7}$$

Мы получили 1-ое уравнение системы уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной форме (см уравнения (1.1.8) и (1.1.12)). Фактически эти уравнения представляют следующее:

*Поток вектора электрической индукции через любую замкнутую поверхность равен полному заряду сторонних носителей, находящихся внутри этой поверхность.*

Таким образом, *вектор* $\vec{D}$ *определяется только сторонними (свободными) зарядами*. Уравнение (2.3.7) представляет собой обобщение теоремы Гаусса для электрического поля в веществе. Свойства вещества сокрыты в векторе индукции электрического поля $\vec{D}$, точнее, в его связи с вектором напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Вектор $\vec{D}$, как и вектор поляризации $\vec{P}$, является искусственно введенным вектором поля, поскольку разделение зарядов на сторонние и связанные заряды условно (см Примечание 2). Важно, что в вакууме вектор поляризации равен нулю $\vec{P} = 0$ и вектор электрической индукции совпадает с вектором напряженности электрического поля $\vec{D} = \vec{E}$.

---

Примечание 1: в системе $СИ$ для вектора электрической индукции и теоремы Гаусса имеем:

$$div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho');$$

$$div\vec{P} = -\rho'; \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}; \quad div\vec{D} = \rho$$

---

Примечание 2. Вектор электрической индукции (смещения) $\vec{D}$, как и вектор поляризации $\vec{P}$, является искусственным вектором. Вектор $\vec{D}$ введен для того, чтобы выделить вклад сторонних зарядов в полное электрическое поле в веществе. Вектор $\vec{P}$ введен для того, чтобы выделить вклад связанных зарядов в полное электрическое поле. Реальное поле в веществе, которое действует на пробные заряды, – есть напряженность электрического поля $\vec{E}$. Введение векторов $\vec{D}$ и $\vec{P}$ облегчает решение электростатических задач, если известна их связь с “истинным” вектором электрического поля $\vec{E}$.

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

2.3.2. Диэлектрическая проницаемость.

В вакууме поле характеризуется только одним вектором $\vec{E}$ – вектором напряженности электрического поля. В веществе, чтобы определять электрическое поле, действующее на пробные заряды, нужно еще знать либо $\vec{P}$, либо $\vec{D}$. Поэтому полученное основное уравнение электростатики надо дополнять еще одним уравнением, которое могло бы связать между собой эти величины.

Принципиально возможно, зная атомную структуру вещества, рассчитать смещение электронов и ядер при включении внешнего электрического поля. Т.е. исходя из знания атомно-молекулярного строения, можно в принципе вычислить вектор поляризации $\vec{P}$ и получить еще одно уравнение, называемое *материальным*, которое связывает напряженность поля $\vec{E}$ внутри вещества и поляризацию. Однако универсальной зависимости $\vec{P}$ от вектора напряженности $\vec{E}$ нет, для каждого вещества эта зависимость своя, поскольку атомы и молекулы обладают различными свойствами и по-разному реагируют на внешнее поле. Таким образом, на пути прямого определения связи между векторами $\vec{P}$ и $\vec{E}$ возникают следующие трудности:

1) связь между векторами $\vec{P}$ и $\vec{E}$ не выражается простыми аналитическими формулами, и она не универсальна.
2) связь этих векторов рассчитать нелегко; только в последние годы делаются попытки теоретического расчета, применяя квантовую механику, благодаря развитию методов современной вычислительной физики.

Поэтому существует другой более простой путь, разработанный ранее, когда еще не существовало квантовой механики и четких представлений об атомно-молекулярной структуре веществ. Этот путь состоял в следующем: найти связь между поляризацией и электрическим полем в веществе *эмпирическим* путем.

Опыт показывает, что связь между векторами $\vec{P}$ и $\vec{E}$ для большинства диэлектриков *линейна* и *однородна*, в широком диапазоне внешних полей, но не приближающихся по величине к внутриатомным полям. При этом необходимо отдельно рассматривать изотропные по пространственным свойствам диэлектрики и анизотропные.

1). Для изотропных диэлектриков и для не слишком больших внешних полей (меньших внутриатомных) вектора $\vec{E}$ и $\vec{P}$ пропорциональны и коллинеарны и материальное уравнение имеет вид:

$$\vec{P} = \alpha\vec{E} \tag{2.3.8}$$

Здесь коэффициент $\alpha$ – *поляризуемость* диэлектрика или *диэлектрическая восприимчивость*. Диэлектрическая восприимчивость определяется свойствами атомов и молекул вещества и может зависеть от плотности и температуры диэлектрика. Тогда подставляя (2.3.8) в вектор индукции (2.3.6), получаем:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\alpha\vec{E} = (1 + 4\pi\alpha)\vec{E} = \varepsilon\vec{E} \tag{2.3.9}$$

Здесь мы ввели *диэлектрическую проницаемость* среды

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha\,. \tag{2.3.10}$$

Этой величиной характеризуют индивидуальные свойства изотропных диэлектриков. Если рассматриваем вакуум, то $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1$ и $\vec{D} = \vec{E}$.

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Примечание 3: в системе *СИ* имеем

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}; \quad \vec{D} = (\varepsilon_0 + \chi\varepsilon_0)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}; \quad \varepsilon = 1 + \chi\,.$$

------------------------------------------------------------------------------------------------

2). Анизотропные среды: например, кристаллы. Для них направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{P}$ не совпадают, и поэтому связь между компонентами этих векторов осуществляется через более общую линейную зависимость:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j \tag{2.3.11}$$

Подробнее (2.3.11) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ P_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ P_z = \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{cases} \qquad (2.3.12)$$

Здесь $\alpha_{ij}$ – безразмерные коэффициенты, зависящие от выбора координатных осей. Совокупность этих 9 коэффициентов $\{\alpha_{ij}\}$ составляет *тензор поляризуемости диэлектрика*.

Аналогично имеем для связи векторов электрической индукции и электрической напряженности

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij}E_j \ , \qquad (2.3.13)$$

где $\{\varepsilon_{ij}\}$ – *тензор диэлектрической проницаемости* вещества:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij} \qquad (2.3.14)$$

Пользуясь законом сохранения энергии можно показать, что тензоры $\{\alpha_{ij}\}$ и $\{\varepsilon_{ij}\}$ симметричны, т.е.

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha_{ji} \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji} \end{aligned} \qquad (2.3.15)$$

Таким образом, в тензорах имеем 6 независимых величин – 6 компонент тензора диэлектрической проницаемости $\{\varepsilon_{ij}\}$. Основное физическое содержание соотношений (2.3.11)- (2.3.13) состоит в том, что при включении внешнего электрического поля в общем случае смещение связанных зарядов и выстроенность внутренних диполей происходит не в направлении приложенного поля, а под некоторым углом к нему. Вследствие этого суммарное электрическое поле внутри вещества становится не только другим по величине, но и по направлению.

В дальнейшем для простоты будем в основном говорить об изотропных диэлектриках.