

## 2.4. Граничные условия.

### 2.4.1. Граничные условия для нормальных составляющих.

Рассмотрим границу двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (см рис. 4.1), помещенных во внешнее электрическое поле. В общем случае на поверхности раздела двух диэлектриков могут находиться связанные  $q'$  и сторонние  $q$  заряды.

При этом рассмотрим, что происходит с электрическим полем при переходе из одной среды в другую. Выберем замкнутую цилиндрическую поверхность, высотой  $h$  и площадью основания  $\Delta S$ , охватывающую границу диэлектриков, и воспользуемся теоремой Гаусса – потоком вектора напряженности через нее:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi(q + q') \quad (2.4.1)$$

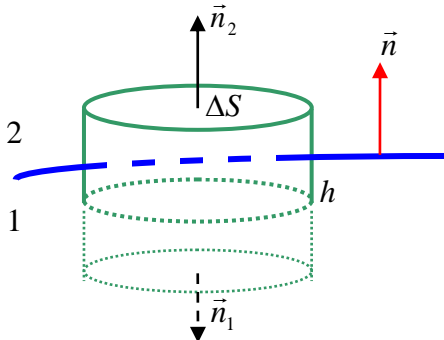


Рис. 4.1.

Пусть высота цилиндра маленькая, так что  $h^2 \ll \Delta S$ . Тогда интеграл в (2.4.1) – поток вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность – представить в виде суммы потоков через основания цилиндра и его боковую поверхность  $\Phi_{бок}$ :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_{2n} \Delta S + E_{1n} \Delta S + \Phi_{бок}$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_{2n} \Delta S - E_{1n} \Delta S + \Phi_{бок} = 4\pi(\sigma + \sigma') \Delta S \quad (2.4.2)$$

Здесь  $E_{1n}$  и  $E_{2n}$  – нормальные составляющие вектора напряженности электрического поля, а  $\sigma'$  и  $\sigma$  – поверхностные плотности связанных и сторонних зарядов на границе раздела. Разные знаки в потоке вектора  $E$  через верхнее и нижнее основания цилиндра в (2.4.2) объясняются тем, что мы ввели одну общую нормаль  $\vec{n}$ , направленную из первой среды 1 во вторую 2 (см рис. 4.1). Далее, если устремим  $h \rightarrow 0$ , то при этом  $\Phi_{бок} \rightarrow 0$ . Тогда в этом пределе получаем следующее условие на границе 2-х диэлектриков:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma') \quad (2.4.3)$$

Из (2.4.3) видно, что *нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$  терпит разрыв* на границе двух диэлектриков из-за наличия поверхностных зарядов.

Аналогичным образом можно сосчитать поток векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{P}$  через такую же цилиндрическую поверхность, пользуясь соответствующими теоремами Гаусса (2.3.7) и (2.2.8), и получить следующие граничные условия для их нормальных составляющих:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \quad (2.4.4)$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \quad (2.4.5)$$

Если на границе 2-х диэлектриков нет сторонних зарядов, т.е.  $\sigma = 0$ , то нормальная составляющая вектора электрической индукции  $\vec{D}$  непрерывна:

$$D_{2n} = D_{1n}, \quad (2.4.6)$$

а нормальные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$ , по-прежнему, терпят разрыв из-за наличия поляризованных связанных зарядов.

### 2.4.2. Граничные условия для тангенциальных составляющих.

Для определения изменения тангенциальных составляющих векторов поля воспользуемся теоремой о циркуляции. Так, для вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , помещая замкнутый контур вдоль границы раздела двух диэлектриков 1 и 2, как показано на рис. 4.2, имеем:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (2.4.7)$$

Выберем такой малый контур, по длине которого  $a$  вдоль границ раздела поле можно будет считать постоянным, а поперечные размеры контура по отношению к длине вдоль границы диэлектриков еще

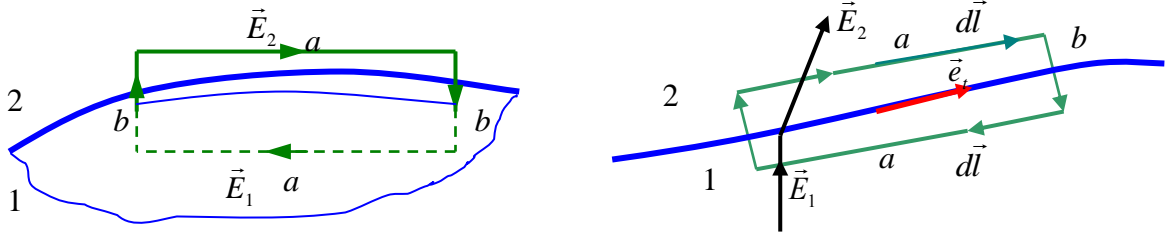


Рис. 4.2.

меньше  $a \gg b$ . Тогда циркуляцию вектора напряженности электрического поля по такому контуру можно записать в виде следующей суммы:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = aE_{2t} - aE_{1t} + \langle E_n \rangle b - \langle E_n \rangle b = 0$$

Откуда при  $b \rightarrow 0$  получаем:

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (2.4.8)$$

Итак, получаем следующий вывод: *тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля непрерывны*, т.е. не меняются при переходе через границу диэлектриков.

Для изотропных диэлектриков имеем из формул §2.3:

$$\varepsilon \vec{E} = \vec{D} \quad \text{и} \quad \vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E}, \quad (2.4.9)$$

тогда из равенства тангенциальных составляющих вектора  $\vec{E}$  следует:

$$\frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1}. \quad (2.4.10)$$

Таким образом, тангенциальные составляющие вектора электрической индукции  $\vec{D}$  терпят разрыв на границе 2-х диэлектриков:

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.4.11)$$

Для тангенциальных составляющих вектора поляризации  $\vec{P}$  имеем также разрыв на границе:

$$\begin{aligned} \frac{P_{2t}}{\varepsilon_2 - 1} &= \frac{P_{1t}}{\varepsilon_1 - 1} \\ \frac{P_{2t}}{P_{1t}} &= \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_1 - 1} \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

#### 2.4.3. Закон преломления линий индукции.

Пусть на границе 2-х изотропных диэлектриков нет сторонних зарядов –  $\sigma = 0$ . Тогда, пользуясь формулами (2.4.6), (2.4.8)-(2.4.11), имеем следующие условия на границе диэлектриков:

$$\begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau}, & \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \\ E_{2n} - E_{1n} &= 4\pi\sigma' \\ D_{1n} &= D_{2n}, & \frac{E_{1n}}{E_{2n}} &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Тогда можно написать закон преломления линий индукции электрического поля (см рис. 4.3):

$$\frac{\text{tg}\alpha_2}{\text{tg}\alpha_1} = \frac{D_{2t}/D_{2n}}{D_{1t}/D_{1n}} = \frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.4.14)$$

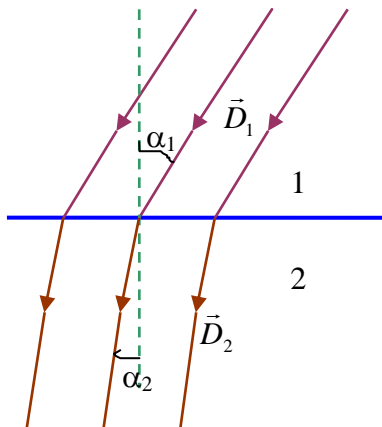


Рис. 4.3.

Аналогичные законы преломления можно записать для векторов напряженности и поляризации.

2.4.4. Примеры вычисления полей в диэлектриках.

1). Рассмотрим точечный заряд, находящийся в однородном и изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Выберем поверхность – сферу радиуса  $r$ , окружающую заряд  $q$ , и запишем теорему Гаусса для вектора электрической индукции:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \quad (2.4.15)$$

Откуда получаем электрическую индукцию и напряженность поля электрического заряда в веществе:

$$\begin{cases} D = \frac{q}{r^2} \\ E = \frac{q}{\epsilon r^2} \end{cases} \quad (2.4.16)$$

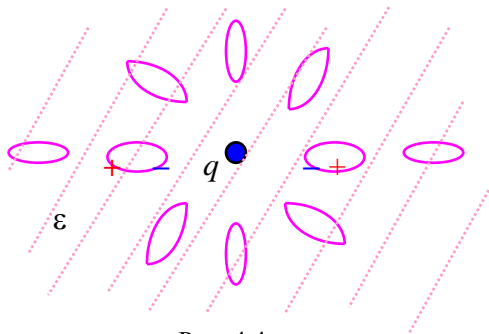


Рис. 4.4.

Легко получить, что потенциал поля точечного заряда в диэлектрике равен:

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r} \quad (2.4.17)$$

Можно также записать вектор поляризации:

$$\vec{P} = -\frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad (2.4.18)$$

Интересно при этом отметить, что, несмотря на то, что электрическое поле неоднородное, объемная плотность связанных зарядов в диэлектрике равна 0, т.к.

$$\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \quad (2.4.19)$$

2). Диэлектрическая пластинка в однородном электрическом поле напряженности  $\vec{E}_0$ . Пусть вне пластинки вакуум, или воздух, диэлектрическая проницаемость которого равна 1. Для простоты положим, что силовые линии поля перпендикулярны к поверхности пластины. На поверхности пластинки появляются связанные заряды, которые создают “противополе” внутри пластины (см рис. 4.5). Из-за перпендикулярности направления поля к поверхности пластинки вектор индукции непрерывен во всех трех областях, а именно:

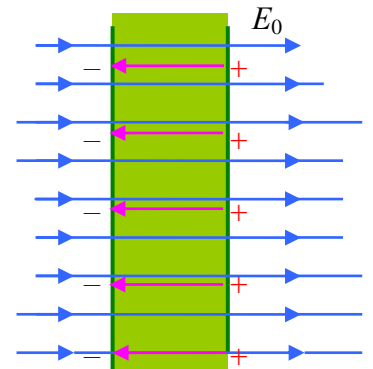


Рис. 4.5.

$$D_1 = D_2 = D_3$$

Поле вне пластинки, например, в области 1 (см рис. 4.6), совпадает с вектором электрической индукции

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = E_1 = E_0 \quad (2.4.20)$$

То же поле получаем в области 3. Поле внутри пластинки меньше поля снаружи (в вакууме) в  $\epsilon$  раз:

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon} = \frac{D_1}{\epsilon} = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (2.4.21)$$

Вектор поляризации также перпендикулярен пластинам и, учитывая, что вне пластин поляризация равна  $P_1 = 0$ , получаем из (2.4.5) и (2.4.9) поляризацию внутри диэлектрика:

$$P_2 = -\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E_2 = \frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} E_0 \quad (2.4.22)$$

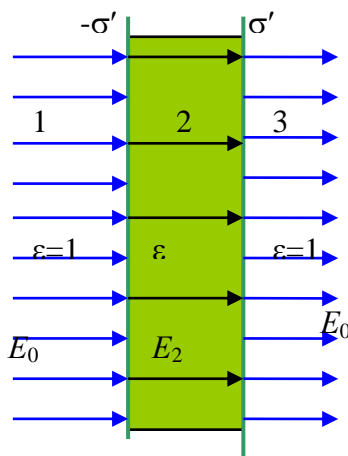


Рис. 4.6.

Вектор поляризации внутри пластины постоянен, поскольку поле в пластинке однородно и в изотропном диэлектрике не появляется объемной плотности связанных зарядов  $\rho' = 0$ .

**Примечание 1.** Если диэлектрическая пластинка окружена пластинами плоского конденсатора с плотностью стороннего заряда  $\sigma$ , то внешнее поле, создаваемое таким заряженным конденсатором, равно:

$$E_0 = 4\pi\sigma. \quad (2.4.23)$$

Тогда получаем связь между плотностью сторонних зарядов и плотностью наведенных связанных зарядов:

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma \quad (2.4.24)$$

На самом деле соотношение (2.4.24) справедливо для любого вида поверхности, разделяющей сторонние (в металле) и связанные (в диэлектрике) заряды.

3). Диэлектрический шар в однородном электрическом поле.

Сложнее рассматривать другие более сложные по форме диэлектрические тела, помещенные в электрическое поле (например, цилиндр, шар). При определении электрического поля внутри таких тел необходимо пользоваться **граничными условиями** и **условиями на бесконечности**.

Рассмотрим шар из диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon$  в однородном электрическом поле  $E_0$ . Условия на границе и теорема о единственности решения приводят к тому, что вектор поляризации постоянен внутри шара, т.е. поле поляризации однородно. Поляризацию шара можно рассматривать как результат смещения положительно заряженного шара относительно отрицательно заряженного (рис. 4.7). Полное поле как внутри, так и вне шара равно сумме внешнего поля  $\vec{E}_0$  и поля  $\vec{E}_{int}$ , создаваемого поляризованным шаром.

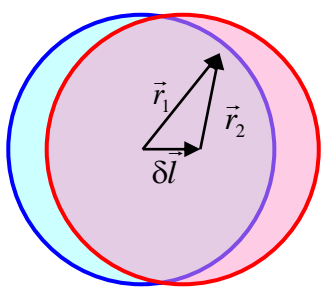


Рис. 4.7.

Рассмотрим сначала поле, создаваемое самим поляризованным шаром. Смещение положительно заряженного шара относительно отрицательно заряженного шара на малое расстояние  $\delta\vec{l}$  приводит к появлению дипольного момента  $\vec{p} = q\delta\vec{l}$  (см определение диполя в § 1.7). Тогда вектор поляризации, рассматриваемый как дипольный момент единицы объема, равен:

$$\vec{P} = \frac{q\delta\vec{l}}{V} = \rho\delta\vec{l} \quad (2.4.25)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда одного знака,  $V$  – объем шара. Рассмотрим поле внутри шара как сумму полей от отрицательно заряженного шара (с плотностью заряда « $-\rho$ ») и положительно заряженного шара (с плотностью  $\rho$ ), смещенных друг относительно друга на малое расстояние  $\delta\vec{l}$ , т.е. записываем:

$$\vec{E}_1 = -\frac{4\pi}{3}\rho\vec{r}_1; \quad \vec{E}_2 = \frac{4\pi}{3}\rho\vec{r}_2 \quad (2.4.26)$$

Напомним, что эти выражения (2.4.26) для поля равномерно заряженного шара были получены с помощью теоремы Гаусса в Главе 1 (см формулу (1.3.16)). Тогда для электрического поля внутри шара получаем:

$$\vec{E}_{внутри} = -\frac{4\pi}{3}\rho\delta\vec{l} = -\frac{4\pi}{3}\vec{P} \quad (2.4.27)$$

где  $\delta\vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , а дипольный момент записан через вектор поляризации  $\vec{P}$ .

Электрическое поле вне поляризованного шара – это поле точечного диполя, помещенного в центре шара, с дипольным моментом

$$\vec{p} = q\delta\vec{l} = \vec{P}V = \frac{4}{3}\pi R^3\vec{P}.$$

Таким образом, исходя из (1.7.9), имеем для напряженности поля вне шара следующее выражение:

$$\vec{E}_{вне} = V \left[ \frac{3(\vec{P}, \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right] \quad (2.4.28)$$

Теперь рассмотрим полное электрическое поле, создаваемое внешним полем и полем поляризованного шара. Итак, учитывая, что  $\vec{P} = \alpha\vec{E}$  и  $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$ , полное электрическое поле внутри шара равно:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{внутри} = \vec{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\vec{P} = \vec{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\alpha\vec{E} \quad (2.4.29)$$

$$\vec{E} \left( 1 + \frac{4\pi\alpha}{3} \right) = \vec{E}_0$$

$$\vec{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0 \quad (2.4.30)$$

Видно из (2.4.30), что электрическое поле внутри диэлектрического шара меньше внешнего поля, так как диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon > 1$ . При этом вектор поляризации равен:

$$\vec{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0 \quad (2.4.31)$$

Полное электрическое поле снаружи диэлектрического шара определяется просто суммой:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + V \left[ \frac{3(\vec{P}, \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right] \quad (2.4.32)$$

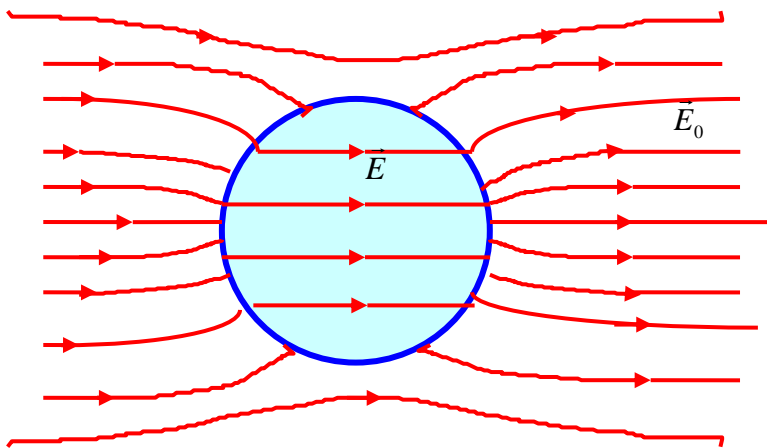


Рис. 4.8.

Примерное поведение силовых линий напряженности электрического поля вблизи диэлектрического шара изображено на рис. 4.8.

Важно отметить, что именно это поле снаружи (2.4.32) и поле внутри шара (2.4.30) дает правильные граничные условия

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

Следовательно, в силу теоремы о единственности решения электростатических задач с определенными граничными условиями наши рассуждения оказываются справедливыми.

**Примечание 2.** Однородно поляризованный диэлектрический шар можно также рассматривать как шар, заряженный с поверхностной плотностью заряда, изменяющейся по закону косинуса:

$$\sigma' = \sigma'_0 \cos\theta$$

где угол  $\theta$  отсчитывается от направления вектора смещения центров шаров  $\delta\vec{l}$ .

**Примечание 3.** Уравнение Пуассона для диэлектриков, определяющее связь между распределением заряда и потенциалом, имеет вид:

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \quad (2.4.33)$$