

2.5. Проводники в электрическом поле.

2.5.1. Проводники.

Проводниками называются вещества, в которых при включении внешнего поля перемещаются заряды и возникает ток. Наиболее хорошими проводниками электричества являются металлы. Рассмотрим основные особенности проводников.

- 1). В проводниках имеются свободные заряды, т.е. индукционные заряды разделяются. Для металлов свободными зарядами являются электроны.
- 2). В равновесии электрическое поле равно нулю $E = 0$ внутри проводника. Если поле не равно нулю в какой-то момент времени, то происходит перераспределение зарядов до создания такой ситуации, когда электрическое поле равно нулю внутри проводника. Отсюда получаем, что $\text{div}\vec{E} = 0$ и, следовательно, объемная плотность зарядов внутри однородного проводника равна тоже нулю.
- 3). Электрический заряд может располагаться только на поверхности, поскольку из-за кулоновских сил отталкивания свободные заряды разбегаются на максимально возможные расстояния.
- 4). Так как поле внутри проводника $\vec{E} = 0$, то потенциал постоянен $\varphi = \text{const}$ – проводник *эквипотенциален*.

- 5). Напряженность поля на поверхности направлена перпендикулярно к ней $\vec{E} = \vec{E}_n$. Иначе возникают токи по поверхности до тех пор, пока не ликвидируется тангенциальная составляющая поля. Таким образом, тангенциальная составляющая E_τ внутри и вне проводника равна 0. Доказательство можно провести, используя теорему о циркуляции для вектора \vec{E} вблизи поверхности проводника по выбранному малому контуру 1-2-3-4, как показано на рис. 5.1:

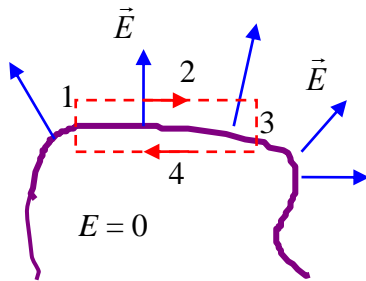


Рис. 5.1.

по поверхности до тех пор, пока не ликвидируется тангенциальная составляющая поля. Таким образом, тангенциальная составляющая E_τ внутри и вне проводника равна 0. Доказательство можно провести, используя теорему о циркуляции для вектора \vec{E} вблизи поверхности проводника по выбранному малому контуру 1-2-3-4, как показано на рис. 5.1:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 = \sum_{i=1}^4 \int_i \vec{E} d\vec{l} \quad (2.5.1)$$

Участки контура 1 и 3 можно выбрать произвольными, в том числе и бесконечно малыми по сравнению с участками 2 и 4. Следовательно, интегралы по этим участкам можно положить равными нулю. Нулю также равен интеграл по участку 4, где поле равно нулю, поскольку участок контура проходит внутри металла. И в силу произвольности длины (малой) кусочка контура 2 получаем, что $E_\tau = 0$ – тангенциальная составляющая и снаружи проводника равна нулю.

- 6). Рассмотрим поле вблизи поверхности проводника. Выберем цилиндрическую поверхность, охватывающую поверхность проводника (рис. 5.2) и вырезающую на поверхности проводника площадку ΔS с плотностью стороннего заряда σ . По теореме Гаусса

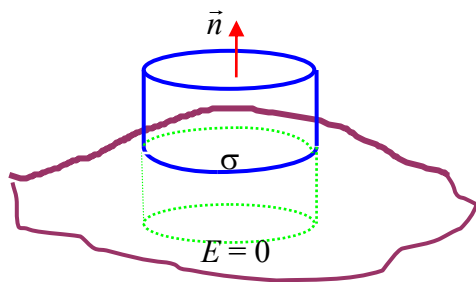


Рис. 5.2.

имеем для потока вектора \vec{E} через выбранную поверхность:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi\sigma\Delta S, \quad (2.5.2)$$

Поток вектора E через нижнее основание и боковую поверхность цилиндра равен нулю. Тогда получаем поле вблизи поверхности проводника равно:

$$E\Delta S = 4\pi\sigma\Delta S$$

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n} \quad (2.5.3)$$

Поскольку поле внутри проводника равно нулю, то получаем скачок нормальной составляющей напряженности электрического поля при переходе через поверхность проводника.

Примечание 1. В системе СИ поле вблизи поверхности заряженного проводника равно: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$

Скачок нормальной составляющей вектора \vec{E} можно (и полезно) также объяснить другим путем – через суперпозицию 2-х полей. Полное поле \vec{E} складывается из электрического поля \vec{E}_0 маленькой

площадки ΔS , которую можно выделить на поверхности проводника, и поля \vec{E}_{ext} , возбуждаемого всеми остальными зарядами проводника (см рис. 5.3). Поле заряженной площадки (вблизи ее поверхности) равно

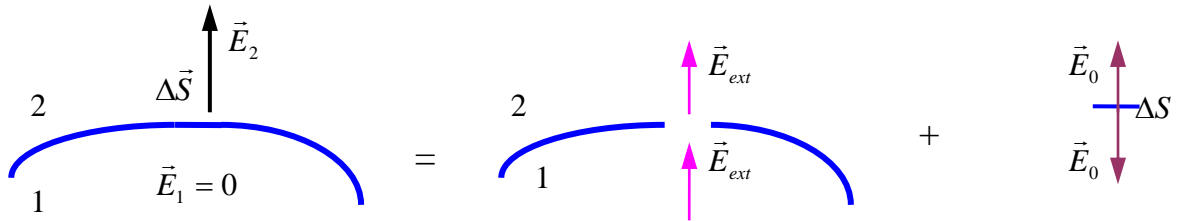


Рис. 5.3.

$E_0 = 2\pi\sigma$, а внешнее поле в “дырке” – непрерывно. Тогда в силу суперпозиции поля равны:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{ext} + 2\pi\sigma\vec{n}_1, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{ext} + 2\pi\sigma\vec{n}_2 \quad (2.5.4)$$

Вводя общую нормаль $\vec{n}_2 = \vec{n}$ и $\vec{n}_1 = -\vec{n}$, получаем разность полей по обе стороны от границы:

$$E_2 - E_1 = 4\pi\sigma \quad (2.5.5)$$

Это является общим соотношением для нормальных составляющих поля. Поскольку поле внутри проводника равно нулю $E_1 = 0$, то снова получаем (2.5.3).

2.5.2. Метод электрических изображений.

Рассмотрим точечный заряд вблизи плоской металлической поверхности (рис. 5.4). Поверхностную плотность наведенного заряда σ и поле вблизи металлической поверхности можно вычислять двумя способами. Можно непосредственно считать поверхностную плотность заряда, пользуясь граничными условиями, а можно ввести «зеркальное» изображение заряда под поверхностью и находить электрическое поле над поверхностью металлической поверхности как сумму полей точечных зарядов – истинного и его изображения (рис. 5.4).

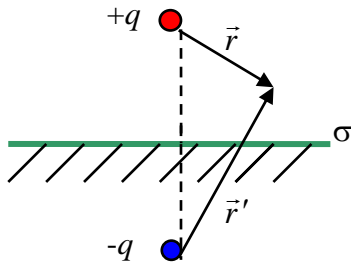


Рис. 5.4.

Сосчитаем сначала поле вблизи поверхности – над плоскостью и под плоскостью – как сумму полей точечного заряда и заряда, наведенного на поверхности. Очевидно, что знак наведенного заряда противоположен знаку точечного заряда, а поверхностная плотность распределения $\sigma = -\sigma(\rho)$ меняется с расстоянием ρ , отсчитываемого от точки на плоскости, куда проектируется заряд (см рис. 5.5).

Суммарное электрическое поле есть сумма напряженности от точечного заряда и напряженности от поверхностной плотности заряда. Как было показано ранее (формула (2.5.1)) продольные (тангенциальные) составляющие равны 0. При этом нормальные составляющие над металлической поверхностью складываются, а под поверхностью – вычитаются, причем так, что поле под поверхностью равно 0. Итак, используя (2.5.3) и (2.5.4), имеем над поверхностью для нормальной составляющей поля (рис. 5.5) следующее соотношение:

$$\begin{aligned} -E_z = E_1 = 4\pi\sigma &= \frac{q}{r^2} \cos\theta + 2\pi\sigma = \\ &= \frac{qh}{r^3} + 2\pi\sigma = \frac{qh}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} + 2\pi\sigma \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

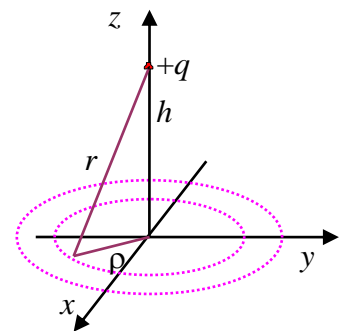


Рис. 5.5.

Соответственно под поверхностью:

$$E_z = E_2 = 0 = \frac{q}{r^2} \cos\theta - 2\pi\sigma = \frac{qh}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} - 2\pi\sigma \quad (2.5.7)$$

Откуда напряженность поля вблизи поверхности и поверхностная плотность заряда для проводника равны соответственно (с учетом знаков):

$$E = 4\pi\sigma(\rho) = -\frac{2qh}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}},$$

$$\sigma(\rho) = -\frac{qh}{2\pi(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad (2.5.8)$$

Если просуммируем весь заряд, наведенный на поверхности, то получим заряд “-q”. В самом деле, рассмотрим интеграл по всей поверхности:

$$q_{ind} = \int_0^\infty \sigma 2\pi\rho d\rho = -2\pi q \frac{h}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{d(\rho^2 + h^2)}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = qh \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \Big|_0^\infty = -q \quad (2.5.9)$$

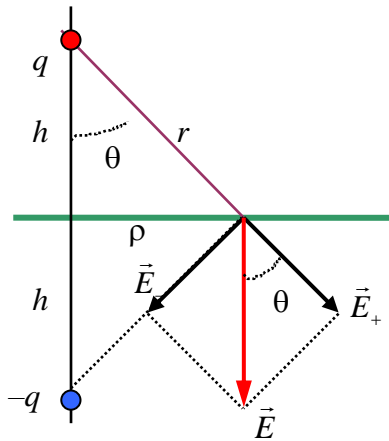


Рис. 5.6.

Оказывается, что такое же поле (2.5.8) над поверхностью можно получить, используя “отраженный” заряд $-q$ вместо рассмотрения поверхностной плотности заряда. Этот заряд имеет противоположный знак и расположен на том же расстоянии h за поверхностью (см рис. 5.6). В самом деле, получаем вблизи поверхности суммарное поле, определяемое формулой (2.5.8):

$$E = 2E_+ \cos\theta = \frac{2qh}{r^3} = -E_z \quad (2.5.10)$$

Этот метод – метод “**изображений**” – позволяет найти поле в любой точке выше металлической поверхности, которое определяется как векторная сумма полей от этих двух зарядов (рис. 5.4 - 5.6):

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r} - \frac{q}{r'^3} \vec{r}' \quad (2.5.11)$$

где \vec{r} и \vec{r}' – радиус-векторы точки пространства от заряда над плоскостью и его изображением соответственно.

В самом общем случае – **метод электрических изображений** – это искусственный метод для расчета взаимодействия проводников с зарядами и другими полями. Пусть имеется система точечных зарядов и пусть S – эквипотенциальная поверхность, разделяющая пространство на два полупространства I и I' (см рисунок). Задание величин зарядов q_1, q_2, q_3, \dots и потенциала на поверхности S однозначным образом определяет электрическое поле в полупространстве I . Аналогично в полупространстве I' .

В математике доказывается теорема о единственности решения уравнения

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

с определенными граничными условиями. Поэтому, если сделать поверхность S проводящей, то электрическое поле во всем пространстве не изменится, так как поля в областях I и I' независимы. Тогда поле в полупространстве I можно получать двумя эквивалентными способами:

- 1) либо как сумму полей от зарядов q_i и поверхности S ;
- 2) либо как сумму полей от q_i и q'_i .

При этом совокупность зарядов q'_i является электрическим изображением зарядов q_i в поверхности S . Отсюда следует способ расчета взаимодействия зарядов с проводниками и полей вблизи проводников – метод электрических изображений: заменять взаимодействие с проводящей поверхностью взаимодействием с зарядами изображения.

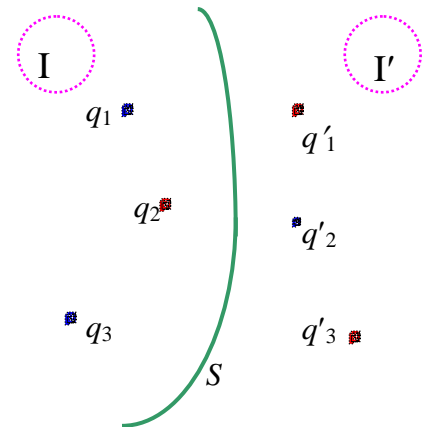


Рис. 5.7.

2.5.3. Емкость проводников.

Если проводнику сообщаем заряд q , то он распределяется единственным образом так, чтобы поле внутри проводника было равно нулю. Это справедливо, когда проводник уединенный, т.е. когда нет по близости других тел, чьи заряды или поляризация могут перераспределять заряды на нашем проводнике.

Итак, рассматриваем уединенный проводник. Если на него добавим еще заряд Δq , то он распределится аналогичным образом, но только вырастет напряженность поля вблизи поверхности и потенциал проводника. То есть, получаем прямую пропорциональность:

$$q \sim \varphi, \quad q = C\varphi, \quad (2.5.12)$$

где коэффициент пропорциональности есть *емкость уединенного проводника* C .

В качестве примера рассмотрим металлический шар радиуса R . Пусть этот шар равномерно заряжен зарядом q , тогда его потенциал определяется:

$$\varphi = \int_R^{\infty} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{R} \quad \text{или} \quad q = R\varphi. \quad (2.5.13)$$

По определению (2.5.12) емкость проводящего шара равна его радиусу (в системе единиц $CGSE$):

$$C = R. \quad (2.5.14)$$

Единица емкости в системе $CGSE_C$ (системе Гаусса): $[C] = 1 \text{ см}$.

Примечание 2. В системе $СИ$ имеем $C = 4\pi\epsilon_0 R$ и единица емкости 1 Фарада:

$$1 \Phi = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ CGSE}}{1/300 \text{ CGSE}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}$$

Фарада – очень большая величина, так 1 Φ – это емкость шара радиусом $9 \cdot 10^9$ м. В практическом определении емкостей вводят обычно величины: $m\Phi$, $\mu\text{к}\Phi$, $\text{н}\text{к}\Phi$.

2.5.4. Конденсаторы.

Конденсаторы – 2 металлические обкладки, отделенные слоем диэлектрика. Считаем, что внешние поля не влияют на поле между обкладками, заряды на обкладках равны по величине и противоположны по знаку. В реальном конденсаторе это справедливо приближенно, но часто с достаточно хорошей точностью.

Заряд на одной из обкладок конденсатора связан с разностью потенциалов между обкладками прямо пропорционально. Введем коэффициент пропорциональности – *емкость конденсатора*:

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2.5.15)$$

Емкость зависит от конструкции конденсатора. Наиболее распространенные конденсаторы: *плоский*, *цилиндрический* и *сферический*. Рассмотрим простейшие случаи.

1). **Плоский конденсатор**: две параллельные пластинки, между которыми расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ (рис. 5.8). Расстояние между пластинами равно d , площадь пластин равна S . Напряжение на конденсаторе (разность потенциалов между пластинами) равно:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U.$$

Электрическое поле внутри конденсатора – однородное (пренебрегая краевыми изменениями поля):

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} = \frac{4\pi q}{\epsilon S} \quad (2.5.16)$$

Тогда связь между напряжением и полем равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d = 4\pi \frac{qd}{\epsilon S}. \quad (2.5.17)$$

Откуда получаем емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d} \quad (2.5.18)$$

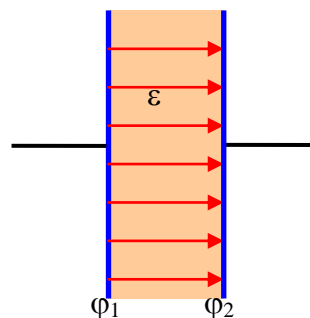


Рис. 5.8.

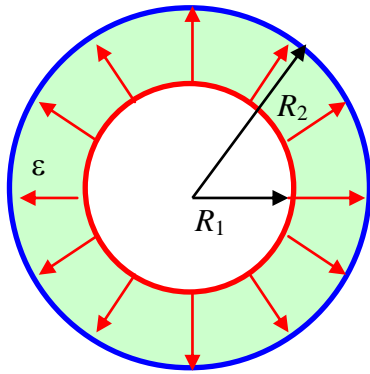


Рис. 5.9.

2). **Сферический конденсатор:** обкладками являются 2 концентрические сферы, радиусами R_1 и R_2 , между которыми расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε (см рис. 5.9). Разность потенциалов между обкладками определяется из соотношения

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.5.19)$$

И тогда емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (2.5.20)$$

3). **Цилиндрический конденсатор:** обкладками являются 2 коаксиальных цилиндрических поверхности радиусами a и b . Длина цилиндров равна l (при этом считаем, что l достаточно велико по сравнению с расстоянием между обкладками), между ними расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε . Поле внутри цилиндрического конденсатора (между цилиндрами) легко получить по теореме Гаусса (см Глава 1 §3, формула (1.3.11)):

$$E = \frac{2\lambda}{\varepsilon r}, \quad (2.5.21)$$

где r – расстояние, отсчитываемое от оси симметрии, λ – заряд, приходящийся на единицу длины одного из цилиндров. Тогда разность потенциалов равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_a^b E dr = \frac{2\lambda}{\varepsilon} \ln \frac{b}{a} = \frac{2q}{\varepsilon l} \ln \frac{b}{a} \quad (2.5.22)$$

Следовательно, емкость цилиндрического конденсатора определяется:

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \quad (2.5.23)$$

Примечание 3. В системе СИ емкости простейших конденсаторов равны:

емкость плоского конденсатора определяется соотношением

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S / d .$$

емкость сферического конденсатора равна

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

емкость цилиндрического конденсатора записывается

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln(b/a)} .$$