2.6. Энергия электрического поля.

2.6.1. Энергия системы зарядов.

Энергию электрического поля мы уже фактически рассматривали ранее, когда вводили понятие потенциала и разности потенциалов. При сближении электрических зарядов одного знака совершается работа против сил кулоновского взаимодействия $-dA$:

$$-dA = dW\ .$$

Эта работа приводит к тому, что система зарядов обладает потенциальной энергией. Энергию взаимодействия двух одинаковых зарядов мы также получали ранее (см (1.6.1)-(1.6.2)):

$$W = q\varphi = \frac{q^2}{r}\ .$$

где r – расстояние между этими зарядами.

При получении системы 2-х любых зарядов можно поступать двумя способами (см рис. 6.1): 1) либо приносим заряд 2 из бесконечности (где мы как обычно полагаем потенциал равным 0) в точку, отстоящую на расстояние r_{12} от первого заряда, 2) либо, наоборот, приносим заряд 1 к заряду 2. При этом работы, и, очевидно, потенциальные энергии, будут одинаковы:

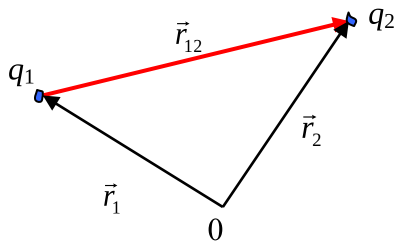

Рис. 6.1.

$$\begin{aligned} A_{12} &= -q_2\varphi_2 = -\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = -W_{21} \\ A_{21} &= -q_1\varphi_1 = -\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = -W_{12} \end{aligned} \qquad (2.6.1)$$

где φ_1 (φ_2) – потенциал в точке, где находится заряд q_1 (q_2). Итак, получаем, что энергия системы, состоящей из двух зарядов равна:

$$W_{12} = W_{21} = W = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad (2.6.2)$$

Перепишем (2.6.2) в симметричной записи:

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_2}{r_{12}}\right) \qquad (2.6.3)$$

Тогда, перенося из бесконечности таким же образом другие заряды, получаем, что энергия системы N зарядов, изображенная на рис. 6.2, может быть записана в аналогичном виде:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{k(\neq i)=1}^{N} \frac{q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,i\\ k\neq i}}^{N} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}, \qquad (2.6.4)$$

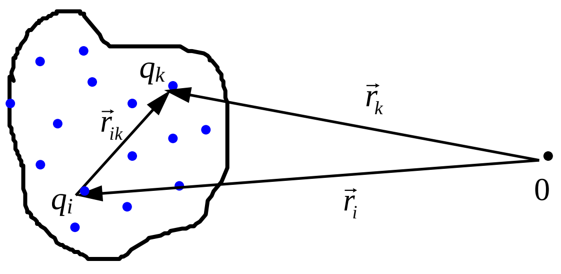

Рис. 6.2.

где φ_i – потенциал, создаваемый всеми остальными зарядами в точке, где находится i -ый заряд, а расстояние $r_{ik} = r_{ki} = \left|\vec{r}_k - \vec{r}_i\right|$ – относительное расстояние между двумя зарядами.

В случае непрерывного распределения зарядов эти формулы для определения потенциальной энергии нетрудно обобщить, имея в виду существование как объемных, так и поверхностных зарядов – $dq = \rho dV,\quad dq = \sigma dS$:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS\,, \qquad (2.6.5)$$

где φ – значение потенциала поля всех объемных и поверхностных зарядов в элементе объема dV или на элементе поверхности dS. Интегрирование может идти по нескольким областям. Хотя здесь речь шла только о сторонних (свободных) зарядах, формула (2.6.5) справедлива и в присутствии вещества, т.е. при наличии связанных зарядов. Влияние связанных зарядов в веществе проявляется в величине потенциала φ, где находятся сторонние заряды.

Приведем несколько примеров:

а). Энергия уединенного проводника. Считаем, что вначале потенциал равен нулю $\varphi = 0$, затем на проводник помещаем заряд q. Потенциал проводника, исходя из формулы (2.5.12), пропорционален его заряду и равен $\varphi = \frac{q}{C}$, где C – емкость уединенного проводника. Теперь вносим малый заряд dq и сосчитаем работу, потраченную на внесение дополнительного заряда, а затем с помощью интегрирования – на создание полного заряда на проводнике, т.е. найдем потенциальную энергию проводника:

$$dW = \varphi\, dq = \frac{q}{C}dq, \quad W = \frac{1}{C}\int_0^{q_0} q dq = \frac{q_0^2}{2C}$$

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{1}{2}q_0\varphi = \frac{1}{2}C\varphi^2 \tag{2.6.6}$$

Получили энергию уединенного проводника, считая, что на бесконечности потенциал равен нулю.

б). Энергия конденсатора. Конденсатор запасает электрическую энергию. Для него справедлива та же формула (2.6.6), только перенос заряда осуществляется, не из бесконечности, а от одной пластины к другой. Для плоского конденсатора (положим пока в формуле (2.5.15) диэлектрическую постоянную равной единице $\varepsilon = 1$) емкость записывается в виде $C = \frac{S}{4\pi d}$, и тогда энергия плоского конденсатора равна

$$W = \frac{S\varphi^2}{8\pi d} = E^2\frac{Sd}{8\pi} = E^2\frac{V}{8\pi} \tag{2.6.7}$$

Последнее соотношение очень важно – оно определяет энергию конденсатора не через заряды на нем, а через электрическое поле внутри конденсатора. Можно ввести *плотность энергии* электрического поля внутри конденсатора:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{E^2}{8\pi} \tag{2.6.8}$$

Таким образом, энергия конденсатора может быть выражена через заряды или потенциалы на пластинах, а может быть выражена через электрическое поле внутри конденсатора.

2.6.2. Энергия электрического поля.

Можно показать и в общем случае, что энергия любой системы зарядов может быть выражена через электрическое поле, создаваемое этой системой.

Заметим, что это очень важное обстоятельство! То, что энергия системы зарядов выражается через сами величины зарядов (формулы (2.6.4) и (2.6.5)), соответствует представлениям *теории дальнодействия*, в которой заряды взаимодействуют на расстоянии друг от друга и пренебрегается пространством между ними. Однако если энергия системы зарядов может быть записана через плотность энергии, сосредоточенной в пространстве, то такое описание соответствует представлениям *теории близкодействия*, в которой заряды создают напряженное состояние в пространстве и это состояние пространства ощущают другие заряды в той точке, где они находятся. В электростатике оба эти описания эквивалентны. Однако, современные представления об электромагнитных явлениях, и в частности электромагнитных волнах, приводят к справедливости теории близкодействия и описания электромагнитных явлений с помощью понятия электромагнитного поля.

Итак, в электростатике можно показать, что справедливо соотношение:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS = \frac{1}{8\pi}\int_V E^2 dV, \tag{2.6.9}$$

Здесь интегрирование в правой части (2.6.9) ведется по всему объему, где электрическое поле отлично от нуля. Покажем это.

Примечание 1. Математическое отступление:

Если имеется векторное поле $\vec{A}$, то можно для него написать теорему Гаусса-Остроградского:

$$\oint_S \vec{A}d\vec{S} = \oint_S A_n dS = \int_V div\vec{A}dV$$

Пусть ψ_1 и ψ_2 некоторые скалярные функции и вектор $\vec{A}$ определяется: $\vec{A} = \Psi_1 \nabla \Psi_2$. Сосчитаем дивергенцию:

$$div\vec{A} = \nabla\left(\Psi_1 \nabla \Psi_2\right) = \Psi_1 \nabla^2 \Psi_2 + \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Psi_2 = \Psi_1 \Delta \Psi_2 + \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Psi_2$$

Обозначим нормальную составляющую вектора

$$A_n = \Psi_1 grad_n \Psi_2 = \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n},$$

где n нормаль к поверхности S (записываем таким образом, чтобы далее было проще разобраться с нормалями). Тогда теорема Гаусса для такого вектора может быть записана в следующей форме:

$$\int_V \left(\Psi_1 \nabla^2 \Psi_2 + \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Psi_2\right) dV = \oint_S \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} dS \qquad (2.6.10)$$

Воспользуемся формулой (2.6.10) из математического приложения, положив скалярные функции $\Psi_1 = \Psi_2 = \varphi$ равными потенциалу. Тогда имеем:

$$\int_V \left(\varphi\Delta\varphi + \nabla\varphi\nabla\varphi\right) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \qquad (2.6.11)$$

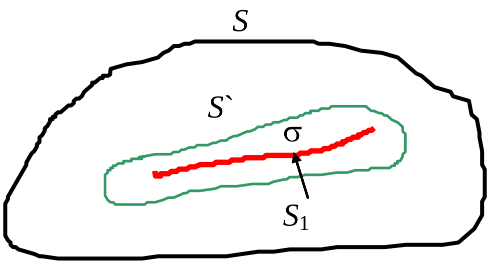

Рис. 6.3.

Вспомним уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ (см §1.6 и формулу (1.6.13)) и то, что градиент потенциала дает напряженность электрического поля

$$\nabla\varphi = -\vec{E}, \qquad \nabla\varphi\nabla\varphi = E^2.$$

Подставим их в наше уравнение (2.6.11):

$$-4\pi\int_V \rho\varphi dV + \int E^2 dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \qquad (2.6.12)$$

Выберем составную поверхность, выделяя на ней разрывы функции $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$. Это необходимо делать для того, чтобы интеграл в правой части (2.6.12) имел смысл и не расходился в местах разрыва производной от потенциала. Пусть S – внешняя поверхность, а S' – поверхность (или поверхности), обходящая заряженные поверхностные слои S_1 (см рис. 6.3). Эти поверхности (их может быть несколько) окружают и изолируют те области, где существует разрыв градиента $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$ или, что то же самое, скачок напряженности электрического поля. Поскольку таких поверхностей может быть несколько, тогда надо ввести сумму интегралов по поверхностям, обходящим заряженные слои. Однако для простоты сейчас ограничимся одной заряженной поверхностью и будем стягивать S' к поверхности S_1, которая заряжена зарядом с поверхностной плотностью σ (см рис. 6.4). Тогда для интеграла по этой дополнительной поверхности получаем:

$$\lim_{S'\to S_1} \oint_{S'} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_{S_1} \left[\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 + \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2 \right] dS \qquad (2.6.13)$$

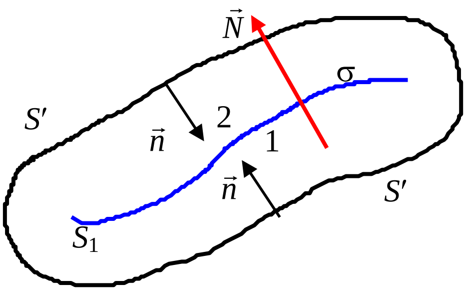

Рис. 6.4.

где индексы 1 и 2 означают "верхнюю" и "нижнюю" стороны поверхности S_1. Здесь у нас $\vec{n}$ – общая нормаль для поверхности S, которая является "внешней" для области с потенциалом φ_1 и "внутренней" для φ_2 (см рис. 6.4). Введем общую внешнюю нормаль $\vec{N}$, тогда, вспоминая, что $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial N}\right)_i = -E_{iN}$ и граничные условия для вектора напряженности электрического поля, имеем:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)_2 = E_{2N} - E_{1N} = 4\pi\sigma$$

Итак, интеграл (2.6.13) записывается:

$$\lim_{S'\to S_1}\oint_{S'}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=\int_{S_1}4\pi\sigma\varphi dS \qquad (2.6.14)$$

Подставляя в (2.6.12), получаем:

$$-4\pi\int_V\rho\varphi dV+\int_V E^2dV=4\pi\int_{S_1}\sigma\varphi dS+\oint_S\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS, \qquad (2.6.15)$$

где интегралы по V проводятся по объему, ограниченному внешней поверхностью S, а в правой части (2.6.15) – интеграл по внешней поверхности S и интеграл (или интегралы) по поверхности S_1 – то есть по поверхностям, имеющим распределенный заряд плотности σ.

Интегралы по наружной поверхности и объему распространяем до поверхности, где поле равно нулю $E = 0$. Если поле распространяется до бесконечности, то и поверхность $S\to\infty$. Интегралы по бесконечной поверхности и бесконечному пространству можно брать только в том случае, если интегралы всех величин по поверхности стремятся к нулю ($\to 0$). Так как поверхность растет с радиусом (расстоянием) $\sim r^2$, то, следовательно, подынтегральное выражение должно убывать быстрее, чем $1/r^2$. Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.6.15) – на бесконечности зарядов нет, поэтому $\varphi\sim 1/r$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\sim\frac{1}{r^2}$, тогда $\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\sim\frac{1}{r^3}$. Следовательно, либо в пределе на бесконечности имеем, что

$$\lim_{S\to\infty}\oint_S\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS\to 0,$$

либо этот интеграл равен 0 на некоторой поверхности, где поле заканчивается и равно 0.

Далее, будем полагать, что (по определению понятия “полного поля”) интегралы по поверхности S, ограничивающей полное поле, обращаются в нуль. Получаем окончательно формулу (2.6.9):

$$W=\frac{1}{2}\int\rho\varphi dV+\frac{1}{2}\int\sigma\varphi dS=\frac{1}{8\pi}\int_V E^2dV$$

Т.е. получили эквивалентность двух определений энергии системы зарядов. Что и требовалось доказать.

2.6.3. Примеры. Собственная энергия.

Пример 1. Рассмотрим электрический заряд на маленьком шарике радиуса r_0: сосчитаем его электрическую энергию по двум формулам (2.6.4) и (2.6.9). Запись через заряд дает значение энергии, равное нулю

$$W=\frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i=0 \qquad (2.6.16)$$

так как потенциал в точках, где находится шарик, равен нулю (нет других зарядов). Запись через электрическое поле в пространстве дает отличное от нуля значение:

$$W=\frac{1}{8\pi}\int E^2dV=\frac{1}{8\pi}\int_{r_0}^{\infty}\frac{q^2}{r^4}4\pi r^2dr=\frac{q^2}{2r_0}\neq 0 \qquad (2.6.17)$$

Итак, эти формулы дают различный результат. Вопрос: в чем разница? Дело в том, что выражения для энергии через электрическое поле (2.6.9) и (2.6.17) учитывает, так называемую, *собственную энергию заряда*. Если бы мы приписали заряду q в формуле (2.6.16) конечный объем, разбили бы его на элементарные заряды dq и сосчитали бы энергию по формулам (2.6.4)-(2.6.5), то получили бы собственную энергию больше 0 в соответствии с формулой (2.6.17).

Собственная энергия – это работа сил взаимного отталкивания более элементарных зарядов, которую они произвели бы, если бы все части заряда разлетелись на бесконечное расстояние.

Пример 2. Рассмотрим полную энергию 2-х взаимодействующих зарядов – q_1 и q_2. Поле, создаваемое зарядом q_1, обозначим через $\vec{E}_1$; поле, создаваемое q_2, – $\vec{E}_2$, при этом полное поле равно $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$. Тогда энергия определяется:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dV = \frac{1}{8\pi}\int E_1^2 dV + \frac{1}{8\pi}\int E_2^2 dV + \frac{1}{4\pi}\int \vec{E}_1\vec{E}_2 dV = W_{11} + W_{22} + W_{12} \qquad (2.6.18)$$

Здесь W_{11} и W_{22} – собственные энергии зарядов q_1 и q_2, соответственно; W_{12} – энергия взаимодействия зарядов

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \vec{E}_1\vec{E}_2 dV = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}}\right) = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad (2.6.19)$$

Из того, что $\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)^2 \geq 0$, следует, что

$$\begin{gathered} E_1^2 + E_2^2 \geq 2\vec{E}_1\vec{E}_2 \\ W_{11} + W_{22} \geq W_{12} \end{gathered} \qquad (2.6.20)$$

Положительная собственная энергия зарядов всегда больше или равна взаимной энергии зарядов, которая может быть, как положительной, так и отрицательной.

Примечание 2. 1) при перемещениях зарядов, не меняющих размеров и формы зарядов, собственная энергия может рассматриваться как аддитивная добавка к энергии, т.е. при решении задач ее можно не учитывать;

2) энергия электростатического поля не обладает свойством аддитивности: электрическое поле аддитивно – $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, но энергия не аддитивна – $W \neq W_1 + W_2$.

2.6.4. Энергия электрического поля в диэлектриках.

Покажем, что в этом случае энергия электрического поля выражается через вектора напряженности и индукции:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \left(\vec{E},\vec{D}\right) dV, \qquad (2.6.21)$$

т.е. плотность энергии электрического поля равна

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{8\pi} \qquad (2.6.22)$$

Если нет поверхностных зарядов, тогда вектора $\vec{E}$ и $\vec{D}$ непрерывны во всем пространстве, и их можно дифференцировать. Если имеются поверхностные заряды (например, на поверхности S_1), будем дифференцировать вектора во всем пространстве за исключением части пространства вокруг этих поверхностных зарядов. Воспользуемся следующей формулой (аналогичной той, что была рассмотрена в Приложении 1):

$$div\left(\varphi\vec{D}\right) = \varphi\, div\vec{D} + \vec{D}\, grad\varphi \qquad (2.6.23)$$

и вспомним, что $grad\varphi = -\vec{E}$, тогда имеем

$$\left(\vec{E},\vec{D}\right) = \varphi\, div\vec{D} - div\left(\varphi\vec{D}\right), \qquad (2.6.24)$$

что и подставим в выражение для энергии (2.6.21):

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int_V div\left(\varphi\vec{D}\right)dV + \frac{1}{8\pi}\int_V \varphi div\vec{D} dV = -\frac{1}{8\pi}\oint_S \varphi\left(\vec{D},d\vec{S}\right) - \frac{1}{8\pi}\oint_{S_1'} \varphi\left(\vec{D},d\vec{S}\right) + \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV \qquad (2.6.25)$$

Здесь мы в первом интеграле по объему воспользовались теоремой Гаусса, причем первый интеграл по наружной поверхности S, а второй (или сумма вторых) – по внутренней поверхности S'_1, окружающей слои с поверхностными зарядами. Во втором интеграле по объему воспользовались одним из уравнений Максвелла: $div\vec{D} = 4\pi\rho$. Проведем интегрирование по всему пространству, когда внешняя поверхность $S \to \infty$, а внутренние поверхности стремятся к слою поверхностных зарядов, т.е. $S'_1 \to S_1$. При конечной системе зарядов интеграл по внешней поверхности $\oint_S \to 0$ при $S \to \infty$. Интегралы по внутренним поверхностям в пределе $S'_1 \to S_1$ равны

$$-\frac{1}{8\pi}\oint\limits_{S_1'\to S_1}\varphi\left(\vec{D},d\vec{S}\right)=\frac{1}{8\pi}4\pi\int\limits_{S_1}\sigma\varphi dS=\frac{1}{2}\int\limits_{S_1}\sigma\varphi dS \tag{2.6.26}$$

поскольку в пределе суммирование (интегрирование) производится по двум сторонам слоя, для которых векторы электрической индукции отличаются в силу граничных условий при пересечении заряженной поверхности $D_{2n}-D_{1n}=4\pi\sigma$ (аналогично тому, как было для вектора $\vec{E}$ и показано на рис. 6.3 и 6.4). Минус в выражении (2.6.26) уходит из-за определения общей нормали к поверхностному слою S_1.

Окончательно получаем:

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_V\varphi\rho dV+\frac{1}{2}\int\limits_{S_1}\varphi\sigma dS=\frac{1}{8\pi}\int\limits_V\left(\vec{E},\vec{D}\right)dV \tag{2.6.27}$$

Итак, в электростатике и для диэлектриков получаем эквивалентность выражений для энергии, записанных через вектора электрического поля и через распределения зарядов в пространстве.

Общее выражение для плотности энергии электрического поля имеет вид:

$$w=\frac{dW}{dV}=\frac{\vec{E}\vec{D}}{8\pi} \tag{2.6.28}$$

Для однородных и изотропных диэлектриков $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ и плотность энергии равна:

$$w=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \tag{2.6.29}$$

В частности, в соответствие с формулами (2.6.7)-(2.6.8) энергия конденсатора увеличивается при помещении внутрь диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε.

Примечание 3. В системе *СИ* имеем следующие выражения для плотности энергии поля в диэлектриках

$$w=\vec{E}\vec{D}/2,$$

а для однородных диэлектриков

$$w=\varepsilon_0\varepsilon E^2/2.$$

Примечание 4. Более общее выражение для энергии электрического поля записывается в виде:

$$W=\int\limits_V wdV,$$

где $$w=\frac{1}{4\pi}\int\left(\vec{E},d\vec{D}\right) \quad \text{и} \quad dw=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E},d\vec{D}\right). \tag{2.6.30}$$

Эти выражения учитывают историю появления электрического поля от момента его включения. Эти формулы справедливы не только для обычных диэлектриков, но и для сегнетоэлектриков и других электретов, у которых диэлектрическая постоянная резко зависит от величины приложенного поля.
