ПОВТОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

0.1. Уравнения Максвелла.

Уравнения Максвелла в интегральной форме:

CGS | СИ

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}d\vec{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}d\vec{S} \qquad \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{j}d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}d\vec{S} \qquad (0.1.1)$$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}d\vec{S} \qquad \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}d\vec{S} \qquad (0.1.2)$$

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \qquad \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \qquad (0.1.3)$$

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi q \qquad \oint_S \vec{D}d\vec{S} = q \qquad (0.1.4)$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

CGS | СИ

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (0.1.5)$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (0.1.6)$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad div\vec{B} = 0 \qquad (0.1.7)$$

$$div\vec{D} = 4\pi\rho \qquad div\vec{D} = \rho \qquad (0.1.8)$$

В дополнение к уравнениям в дифференциальной форме рассматриваются *материальные уравнения*:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \qquad (0.1.9)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \qquad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \qquad (0.1.10)$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \qquad \vec{j} = \sigma\vec{E} \qquad (0.1.11)$$

0.2. Электростатика в вакууме

Закон Кулона – сила взаимодействия между точечными зарядами:

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^{\ 3}}\vec{r}_{12}\,, \qquad F = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \tag{0.2.1}$$

Формулировка закона Кулона: *сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды*.

Силовая характеристика электрического поля – *напряженность* электрического поля, которая определяется как сила, действующая на единичный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \tag{0.2.2}$$

Напряженность поля точечного заряда q:

$$\vec{E} = \frac{q}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}, \qquad E = \frac{q}{r_{12}^2} \tag{0.2.3}$$

Однородное электрическое поле:

$$\vec{E} = const\,. \tag{0.2.4}$$

Принцип суперпозиции: *напряженность электрического поля от всех зарядов определяется как векторная сумма напряженности*, создаваемых отдельными зарядами:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \tag{0.2.5}$$

Электрическое поле от непрерывного распределения заряда с плотностью ρ:

$$\vec{E} = \int \rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}dV' \tag{0.2.6}$$

Этот интеграл (0.2.6) надо понимать как условную запись, реально при вычислении полной напряженности надо рассматривать проекции на оси координат и проводить интегрирование (суммирование) для каждой проекции отдельно. Например, по оси x имеем:

$$E_x = \int \rho(\vec{r}\,')\frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}dV' \tag{0.2.7}$$

Получив все проекции, легко затем получить вектор напряженности поля, складывая эти проекции как вектора со своими ортами.

Закон сохранения заряда является экспериментальным фактом (который в принципе также следует из уравнений Максвелла) и записывается в виде уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0 \tag{0.2.8}$$

Электростатическая теорема Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S равен полному заряду внутри этой поверхности (умноженному на 4π)

$$\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = 4\pi q \tag{0.2.9}$$

Здесь q – суммарный заряд внутри поверхности S. Для непрерывного распределения заряда с объемной плотностью ρ имеем аналогично:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi\int_V \rho dV \tag{0.2.10}$$

где интеграл от плотности заряда в правой части уравнения берется по объему V, окруженному замкнутой поверхностью S.

Удельная мощность источников электрического поля равна:

$$div\vec{E} = \frac{\oint\limits_S \vec{E}d\vec{S}}{\Delta V}_{S\to(\bullet)P} \equiv \frac{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV}{dV} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad (0.2.11)$$

В дифференциальной форме теорема Гаусса имеет вид:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho \qquad (0.2.12)$$

Это же есть *первое уравнение в системе уравнений Максвелла* (если не рассматривать поле в веществе).

Теорема Остроградского-Гаусса: поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью от дивергенции вектора (справедливо для любого векторного поля $\vec{A}$):

$$\oint\limits_S \vec{A}d\vec{S} = \int\limits_V div\vec{A}dV \qquad (0.2.13)$$

Потенциал – *энергетическая характеристика электрического поля*

$$\varphi = \frac{W}{q_0}. \qquad (0.2.14)$$

Разность потенциалов при перемещении из точки 1 в точку 2 определяется работой поля над единичным зарядом:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_1^2 \vec{E}d\vec{r} \qquad (0.2.15)$$

В случае непрерывного распределения заряда потенциал в точке наблюдения определяется через интегралы по поверхности или объему, где существует распределение зарядов. Тогда имеем 2 случая:

а) если имеется объемная плотность заряда $\rho = \rho(\vec{r}\,')$, то потенциал равен интегралу по объему, где имеются заряды

$$\varphi = \int\limits_V \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (0.2.16)$$

б) если имеется поверхностная плотность заряда $\sigma = \sigma(\vec{r}\,')$, то потенциал выражается через интеграл по поверхности

$$\varphi = \int\limits_S \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \int\limits_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')dS'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \qquad (0.2.17)$$

В силу потенциальности электрического поля работа его сил по замкнутому контуру равна нулю, т.е. циркуляция по вектора $\vec{E}$ по *замкнутому контуру* равна нулю:

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 0 \qquad (0.2.18)$$

Тогда нормальную (по отношению к малой поверхности ΔS) составляющую вектора ротора определяем следующим образом:

$$rot_n\vec{E} = \lim_{\Delta S\to 0, L\to 0} \frac{\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l}}{\Delta S} \qquad (0.2.19)$$

Поскольку для электрического поля циркуляция по любому контуру равна 0, то ротор $rot\vec{E}$ также равен 0. Итак, для электрического (электростатического) поля имеем:

$$rot\vec{E} = 0 \qquad (0.2.20)$$

Это одно из уравнений системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме для электрического статического (не зависящего от времени) поля.

Теорема Стокса звучит следующим образом: *циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через площадку, ограниченную этим контуром*.

$$\int\limits_S rot\vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint\limits_L \vec{A}\cdot d\vec{l} \qquad (0.2.21)$$

Разность потенциалов при перемещении из точки 1 в точку 2 определяется работой поля над единичным зарядом, формула (0.2.15). Пользуясь определениями (0.2.2) и (0.2.14), получаем связь между потенциалом и напряженностью электрического поля в дифференциальной форме:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi \tag{0.2.22}$$

Далее используя (0.2.12) и (0.2.22), получаем *уравнение Пуассона*, определяющее связь между распределением заряда и потенциалом:

$$\Delta\varphi(x, y, z) = -4\pi\rho \tag{0.2.23}$$

Или в подробной записи:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho \tag{0.2.24}$$

Электрический дипольный момент определяется:

$$\vec{p} = q\vec{l} \qquad (0.2.25).$$

Тогда получаем для потенциала, создаваемого диполем:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{2q\dfrac{\vec{l}\vec{e}_r}{2}}{r^2} = \frac{\vec{p}\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} \tag{0.2.26}$$

Можно представить вектор напряженности в следующей полезной форме:

$$\vec{E} = \frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \tag{0.2.27}$$

Момент силы, действующий на диполь, во внешнем поле $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ (0.2.28)

Энергия диполя во внешнем поле $W = -(\vec{p}, \vec{E})$ (0.2.29)

Сила, действующая на диполь во внешнем поле $\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla})\vec{E}$ (0.2.30)

Рассмотрим систему из N зарядов q_i, разложение потенциала будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}_i\vec{e}_r}{r} + \left(\frac{\vec{r}_i\vec{e}_r}{r}\right)^2 + \dots\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} q_i}{r} + \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} q_i\vec{r}_i, \vec{e}_r\right)}{r^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} q_i(\vec{r}_i, \vec{e}_r)^2}{r^3} + \dots \tag{0.2.31}$$

Первое слагаемое описывает потенциал точечного заряда, величина которого определяется алгебраической суммой всех зарядов системы $\sum\limits_i q_i$, или, иначе говоря, описывает поле *монополя*:

$$\varphi_{mon}(\vec{r}) = \sum_i q_i \Big/ r \tag{0.2.32}$$

2-ое слагаемое описывает потенциал, создаваемый *дипольным моментом системы зарядов* $\vec{p} = \sum\limits_{i=1}^{N} q_i\vec{r}_i$:

$$\varphi_{dip} = \frac{\vec{p}\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} \tag{0.2.33}$$

Если полный заряд и дипольный момент системы равны нулю, то основной вклад дают другие *мультипольные моменты*: в первую очередь – *квадруполь* $\varphi \sim 1/r^3$.

0.3. <u>Электростатика в веществе</u>.

Поляризация характеризуем *дипольным моментом единицы объема – вектором поляризации* $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \sum_{\Delta V}\vec{p}\Big/\Delta V \tag{0.3.1}$$

Здесь $\vec{p}$ – дипольный момент молекулы.

Теорема Гаусса для *вектора поляризации*:

$$\oint_S \vec{P}d\vec{S} = -q', \tag{0.3.2}$$

где q' – связанный заряд внутри поверхности S. Тогда имеем:

$$\oint_S \vec{P}d\vec{S} = \int_V div\vec{P}dV = -\int_V \rho'(\vec{r})dV \tag{0.3.3}$$

При этом дифференциальная связь между объемной плотность связанного заряда и вектором поляризации имеет вид:

$$div\vec{P} = -\rho' \tag{0.3.4}$$

Электрическое поле в веществе создается как сторонними, так и связанными зарядами:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi(q + q') \tag{0.3.5}$$

$$div\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho') \tag{0.3.6}$$

Введем новый вектор – *вектор электрической индукции* (или вектор *электрического смещения*):

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P} \tag{0.3.7}$$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$ в дифференциальном и интегральном виде записывается:

$$div\vec{D} = 4\pi\rho; \quad \oint_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi q \tag{0.3.8}$$

Для *изотропных диэлектриков* вектора $\vec{E}$ и $\vec{P}$ пропорциональны и коллинеарны:

$$\vec{P} = \alpha\vec{E} \tag{0.3.9}$$

где α – *поляризуемость* или *диэлектрическая восприимчивость* диэлектрика. Тогда подставляя (0.3.9) в вектор индукции (0.3.7), получаем:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\alpha\vec{E} = (1 + 4\pi\alpha)\vec{E} = \varepsilon\vec{E} \tag{0.3.10}$$

Диэлектрическая проницаемость среды

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha \tag{0.3.11}$$

Анизотропные среды: например, кристаллы. Для них направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{P}$ не совпадают, и поэтому связь между компонентами этих векторов осуществляется через более общую линейную зависимость:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j \tag{0.3.12}$$

Аналогично имеем для связи векторов электрической индукции и электрической напряженности

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \tag{0.3.13}$$

где ε_{ij} – *тензор диэлектрической проницаемости*.

Уравнение Пуассона в диэлектриках. Для изотропной среды $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, тогда получаем:

$$div\vec{D} = div(-\varepsilon grad\,\varphi) = 4\pi\rho \tag{0.3.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -4\pi\rho(x, y, z)$$

Если диэлектрик однороден (ε не зависит от координат), то получаем уравнение Пуассона для потенциала электрического поля в диэлектриках:

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \tag{0.3.15}$$

Граничные условия на границе двух сред для нормальных составляющих векторов получаем из теоремы Гаусса:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma') \tag{0.3.16}$$

Здесь σ и σ' поверхностная плотность сторонних и связанных зарядов на границе раздела, соответственно. Аналогично можно сосчитать поток векторов $\vec{D}$ и $\vec{P}$ через такую же цилиндрическую поверхность и получить граничные условия для них:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \tag{0.3.17}$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \tag{0.3.18}$$

Для тангенциальных составляющих $\vec{E}$ получаем соотношение исходя из теоремы о циркуляции (0.2.17):

$$E_{2t} = E_{1t} \tag{0.3.19}$$

Тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля непрерывны (не меняются) при переходе через границу диэлектриков. Для изотропных диэлектриков имеем:

$$\varepsilon\vec{E} = \vec{D} \quad \text{и} \quad \vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E}, \tag{0.3.20}$$

Тогда из равенства тангенциальных составляющих вектора $\vec{E}$ отсюда следует:

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{0.3.21}$$

$$\frac{P_{2t}}{\varepsilon_2 - 1} = \frac{P_{1t}}{\varepsilon_1 - 1} \tag{0.3.22}$$

Поле внутри и снаружи диэлектрического шара, находящегося в однородном электрическом поле E_0, определяется:

$$\vec{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\vec{E}_0 \tag{0.3.23}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + V\left[\frac{3(\vec{P},\vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{P}}{r^3}\right] \tag{0.3.24}$$

Здесь $\vec{P}$ - вектор поляризации шара.

0.4. Поле в проводниках.

Наиболее хорошими проводниками электричества являются металлы. Основные свойства проводников:
1). Имеются свободные заряды.
2). В равновесии электрическое поле $E = 0$ внутри проводника.
3). Электрический заряд может располагаться только на поверхности.
4). Т.к. $\vec{E} = 0$, то $\varphi = const$ - проводник *эквипотенциален*.
5). Напряженность поля на поверхности направлена перпендикулярно к ней
6). Поле вблизи поверхности проводника:

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n} \tag{0.4.1}$$

Метод электрических изображений – это искусственный метод для расчета взаимодействия проводников с зарядами и другими полями.

Если на уединенный проводник добавим еще заряд Δq, то он распределится также по поверхности, только вырастет напряженность поля вблизи поверхности и потенциал проводника. То есть, получаем прямую пропорциональность:

$$q \sim \varphi, \quad q = C\varphi, \tag{0.4.2}$$

где коэффициент пропорциональности есть *емкость* C. Емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \tag{0.4.3}$$

0.5. Энергия поля.

Энергия системы зарядов может быть записана в виде:

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\varphi_i=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k,i\\k\neq i}}^{N}\frac{q_iq_k}{r_{ik}} \qquad (0.5.1)$$

где φ_i - потенциал, создаваемый всеми остальными зарядами в точке, где находится i -ый заряд.

В случае непрерывного распределения зарядов эти формулы нетрудно обобщить, имея в виду существование объемных и поверхностных зарядов – $dq=\rho dV$, $dq=\sigma dS$:

$$W=\frac{1}{2}\int_V\rho\varphi dV+\frac{1}{2}\int_S\sigma\varphi dS \qquad (0.5.2)$$

где φ – значение потенциала поля всех объемных и поверхностных зарядов в элементе объема dV или на элементе поверхности dS.

Можно показать, что энергия поля выражается через вектора напряженности и индукции:

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\left(\vec{E},\vec{D}\right)dV, \qquad (0.5.3)$$

т.е. плотность энергии электрического поля равна

$$w=\frac{\vec{E}\vec{D}}{8\pi} \qquad (0.5.4)$$

Более общее выражение для энергии электрического поля записывается в виде:

$$W=\int_V wdV,$$

где $w=\dfrac{1}{4\pi}\int\left(\vec{E},d\vec{D}\right)$ и $dw=\dfrac{1}{4\pi}\left(\vec{E},d\vec{D}\right)$. (0.5.5)

0.6. <u>Система уравнений Максвелла для электростатики</u>.

Уравнения Максвелла в интегральной форме:

CGS	СИ	
$\oint_L\vec{E}d\vec{l}=0$	$\oint_L\vec{E}d\vec{l}=0$	(0.6.1)
$\oint_S\vec{D}d\vec{S}=4\pi q$	$\oint_S\vec{D}d\vec{S}=q$	(0.6.2)

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

CGS	СИ	
$rot\vec{E}=0$	$rot\vec{E}=0$	(0.6.3)
$div\vec{D}=4\pi\rho$	$div\vec{D}=\rho$	(0.6.4)

В дополнение к уравнениям в дифференциальной форме рассматриваются *материальные уравнения*:

$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, $\qquad\qquad$ $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ $\qquad$ (0.6.5)

0.7. Микроскопическая теория поляризации.

Для *неполярных диэлектриков*: при небольших (по сравнению с внутриатомными полями) напряженностях внешнего поля индуцированный дипольный момент зависит от поля E линейно:

$$\vec{p} = \beta \vec{E} \tag{0.7.1}$$

Здесь β – *поляризуемость* молекулы. Тогда вектор поляризации определяется (см (0.3.9))

$$\vec{P} = n\vec{p} = \alpha\vec{E} = n\beta\vec{E} \tag{0.7.2}$$

Для диэлектрической проницаемости имеем:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi n\beta \tag{0.7.3}$$

где n – концентрация молекул,

Поляризуемость неполярной молекулы β является молекулярной константой, зависящей только от внутреннего строения молекулы, поэтому в газах диэлектрическая проницаемость ε не зависит от температуры T, а является только функцией плотности n газа.

Для плотных диэлектриков необходимо поле $\vec{E}$ заменить действующим полем $\vec{E}'$, т.е. $\vec{p} = \beta\vec{E}'$. Простой способ учета этого поля приводит к формуле *Клаузиуса – Моссотти*

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} n\beta \tag{0.7.4}$$

Это соотношение лучше согласуется с опытом, чем (2.8.5), хотя тоже имеет ограниченное применение для жидких и газообразных диэлектриков с неполярными молекулами.

Для *полярных диэлектриков* с дипольным моментом p_0 поляризация диэлектрика, главным образом, обусловлена поворотами осей дипольных молекул в электрическом поле. Вектор поляризации при этом равен:

$$P = \frac{np_0^2}{3kT} E = \alpha E \tag{0.7.5}$$

Таким образом, поляризуемость полярных диэлектриков равна:

$$\alpha = \frac{np_0^2}{3kT} \tag{0.7.6}$$

А диэлектрическая проницаемость:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + \frac{4\pi np_0^2}{3kT} \tag{0.7.7}$$

0.8. Электрический ток.

Плотность тока:
$$\vec{j} = ne\vec{u} \tag{0.8.1}$$

Закон Ома в векторной дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma_R \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho_R} \tag{0.8.2}$$

Далее получаем *закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме*:

$$\frac{dW}{dt\Delta V} = \frac{dw}{dt} = jE = \sigma_R E^2 = \rho_R j^2 = \frac{j^2}{\sigma_R} \tag{0.8.3}$$

где ΔV – объем проводника, w – плотность выделяемой энергии.
Получаем для плотности тока следующее выражение:

$$\vec{j} = ne\vec{u} = \frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle}\vec{E} = \sigma_R\vec{E} \tag{0.8.4}$$

Проводимость определяется из следующей формулы:

$$\sigma_R = \frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle} \tag{0.8.5}$$

Итак, классическая проводимость прямо пропорциональна плотности носителей заряда, квадрату величины заряда и обратно пропорциональна квадратному корню из температуры: $\sigma_R \sim n,\ e^2,\ T^{-1/2}$.

Электродвижущая сила. Перемещение носителей на источниках тока возможно лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения, называемых *сторонними силами*. Сторонние силы можно характеризовать работой, которую они совершают. ЭДС – работа сторонних сил над единичным положительным зарядом:

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} \tag{0.8.6}$$

Размерность ЭДС – размерность потенциала. Можно ввести напряженность поля сторонних сил $E_{ст}$:

$$\vec{E}_{ст} = \frac{\vec{F}_{ст}}{q} \tag{0.8.7}$$

Работа сторонних сил на участке 1 – 2 равна
$$A_{ст} = q\int_1^2 \vec{E}_{ст} d\vec{l} \tag{0.8.8}$$

Тогда ЭДС равна:

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{ст} d\vec{l} \tag{0.8.9}$$

Для замкнутой цепи получаем полную ЭДС в цепи как циркуляция вектора напряженности сторонних сил:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{ст} d\vec{l} \tag{0.8.10}$$

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля $\vec{E}$, тогда результирующая сила равна:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right) \tag{0.8.11}$$

Работа, совершаемая этой силой на участке цепи 1 – 2 определяется:

$$A_{12} = q\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q\int_1^2 \vec{E}_{ст} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}_{12} \tag{0.8.12}$$

Тогда падение напряжения на этом участке цепи определяется:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \tag{0.8.13}$$

На неоднородном участке цепи на носители тока действуют электростатические и сторонние силы. Тогда плотность тока

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right), \qquad \vec{j}d\vec{l} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right)d\vec{l}$$

$$I\rho\frac{dl}{S} = \left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right)d\vec{l}, \qquad I\int_1^2 \rho\frac{dl}{S} = IR = \int_1^2 \left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right)d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}$$

Закон Ома для полной цепи: $\oint \vec{E} d\vec{l} + \oint \vec{E}_{ст} d\vec{l} = 0 + \oint \vec{E}_{ст} d\vec{l} = \mathcal{E} = IR$

$$\mathcal{E} = I\left(R_{внешней} + r_0\right)$$

Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа. По всей цепи распределяем направление токов на каждом из участков цепи и определяем направление действия ЭДС.

<u>Первое правило</u>: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum_i I_i = 0$$

<u>Второе правило</u>: Для любого выделенного в цепи замкнутого контура зададимся направлением обхода этого контура, тогда получаем:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k$$