

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Глава 3. Электрический ток. Магнитное поле.

3.1. Уравнение непрерывности. Время релаксации.

3.1.1. Ток и плотность тока. Опытные законы.

Электрический ток – упорядоченное движение электрических зарядов. Носителями тока являются свободные заряды – электроны, ионы. В металлах носителями тока являются электроны. Экспериментальное доказательство электронной проводимости металлов – опыты Т. Стюарта и Р. Толмена 1916 года. В растворах (жидких электролитах) носителями тока становятся положительные и отрицательные ионы.

Рассмотрим упорядоченное движение зарядов (пусть e – заряд электрона) со средней (дрейфовой) скоростью \vec{u} , тогда через площадку dS (см рис. 1.1) за время dt пройдет заряд dq :

$$dq = neu \cdot dS \cdot dt \quad (3.1.1)$$

где n – концентрация носителей. Введем понятие **плотности тока** \vec{j} :

$$\vec{j} = \frac{dq}{dt dS}, \quad \vec{j} = ne\vec{u} \quad (3.1.2)$$

Если введем вектор $d\vec{S}$, то заряд, проходящий в единицу времени через площадку dS , что и есть элементарный вклад в электрический ток dI , равен (см рис. 1.2):

$$dI = \frac{dq}{dt} = \vec{j} d\vec{S} \quad (3.1.3)$$

Полный ток через проводник сечением S равен:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} \quad (3.1.3a)$$

Почеркнем, что ток – это скалярная величина, в то время как плотность тока – векторная.

Основные опытные законы для тока в электрической цепи: *закон Ома* и *закон Джоуля-Ленца*

1) **Закон Ома для участка цепи.** Сила тока пропорциональна приложенному напряжению (разности потенциалов):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = I \sim U, \quad I = \frac{U}{R} \quad (3.1.4)$$

Здесь I и U – ток и падение напряжения на участке цепи, R – коэффициент пропорциональности или **сопротивление участка цепи**.

О единицах измерения силы тока. Единица силы тока в системе *CGSE*:

$$1 \text{ CGSE}_I = 1 \text{ CGSE}_q \cdot \text{c}^{-1}.$$

Разность потенциалов и сопротивления измеряются в единицах $1 \text{ CGSE}_\varphi = 1 \text{ CGSE}_q / \text{cm}$ и 1 CGSE_R , соответственно.

В системе *СИ* сила тока измеряется в *Амперах*. Ампер – сила тока, соответствующая переносу заряда в один кулон за одну секунду, что эквивалентно переносу $6.2 \cdot 10^{18}$ электронов в секунду. Связь между единицами тока в системах *CGSE* и *СИ* такая же как между единицами заряда:

$$1 \text{ A} = 3 \cdot 10^9 \text{ CGSE}_I.$$

Формальное определение единицы тока в системе *СИ*: Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным и прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на участке проводника, длиной 1 м, силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н. Сопротивление измеряется в Омах – Ом. Подробнее о единицах см ниже в §§3.2 и 3.5.

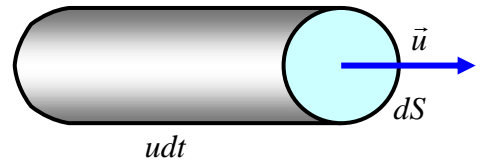


Рис. 1.1.

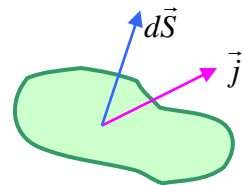


Рис. 1.2.

Закон Ома (3.1.4) можно переписать в дифференциальной форме, вспоминая, что сопротивление участка цепи пропорционально длине проводника и обратно пропорционально величине его поперечного сечения. Тогда вводя коэффициент пропорциональности – *удельное сопротивление* ρ_R , сопротивление малого участка проводника можно записать следующим образом:

$$R = \rho_R \frac{dl}{dS} \quad (3.1.5)$$

где dl и dS – длина и поперечное сечение малого участка провода. Удельное сопротивление определяется свойствами проводника, зависит от температуры, и в данном случае служит коэффициентом пропорциональности.

Учитывая (3.1.5) и считая, что электрическое поле однородно на участке длиной dl , закон Ома переписывается в следующем виде:

$$dI = \frac{dU}{R} = \frac{Edl}{\rho_R \frac{dl}{dS}} = \frac{E}{\rho_R} dS \quad (3.1.6)$$

где E – напряженность электрического поля. Далее, записывая (3.1.6) через плотность тока, имеем:

$$j = \frac{dq}{dtdS} = \frac{dI}{dS} = \frac{E}{\rho_R} = \sigma_R E. \quad (3.1.7)$$

Итак, получаем *закон Ома в векторной дифференциальной форме*:

$$\vec{j} = \sigma_R \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho_R} \quad (3.1.8)$$

Здесь введена *удельная проводимость проводника*:

$$\sigma_R = \frac{1}{\rho_R}.$$

В системе $CGSE$ удельная проводимость измеряется в обратных секундах $1CGSE_\sigma = 1 c^{-1}$, соответственно удельное сопротивление – в секундах. В системе СИ удельная электропроводность измеряется в *Сименсах* на метр длины ($См/м$) или в $Ом^{-1} \cdot м^{-1}$. Учитывая связи между единицами тока и напряженности электрического поля $[E] = 1 CGSE_E = 3 \cdot 10^4 B/м$ связь между единицами проводимости равна:

$$1CGSE_\sigma = 1 c^{-1} = 1/(9 \cdot 10^9) См/м = 1.11265 \cdot 10^{-10} См/м.$$

Величина удельного сопротивления металлов, являющихся хорошими проводниками, может иметь значения порядка $10^{-8} - 10^{-6} Ом \cdot м$ (например, медь, серебро, железо и т. д.). Для анизотропных проводников удельное сопротивление является тензором второго ранга.

Поскольку плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля \vec{E} и направлена вдоль его силовых линий, то можно ввести также понятие силовых линий плотности тока – поле токов \vec{j} .

2) Закон Джоуля - Ленца. Энергия (тепло) W , выделяемая на участке цепи за время t или dt , определяется произведением силы тока, напряжения и времени:

$$\begin{aligned} W &= IUt = I^2 Rt \\ dW &= IUdt = I^2 Rdt \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Вводя выделяемую мощность

$$\frac{dW}{dt} = IU = j \cdot \Delta S \cdot E \cdot \Delta l = jE \cdot \Delta V,$$

получаем *закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме*:

$$\frac{dW}{dt \Delta V} = \frac{dw}{dt} = jE = \rho_R j^2 = \frac{j^2}{\sigma_R} \quad (3.1.10)$$

где ΔV – объем проводника, w – плотность выделяемой энергии.

Примечание 1. *Георг Симон Ом, немецкий физик, 1787-1854.*

Джеймс Прескотт Джоуль, английский физик, 1818-1889.
Эмилий Христианович Ленц, русский физик, 1804-1865.

3.1.2. Закон сохранения электрического заряда.

Закон сохранения электрического заряда – это фундаментальный закон, являющийся обобщением опытных фактов. Пусть произвольная замкнутая поверхность S , представленная на рис. 1.3, ограничивает некоторый объем V . Тогда количество электричества, протекающего через всю поверхность S в единицу времени, равно:

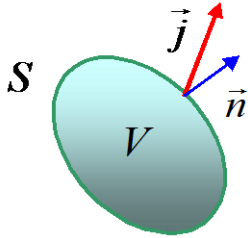


Рис. 1.3.

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = \oint j_n dS = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad (3.1.11)$$

Минус перед зарядом показывает, что происходит уменьшение полного заряда внутри объема V . Далее, записывая заряд в объеме через плотность заряда и воспользовавшись теоремой Гаусса, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = -\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV \quad (3.1.12)$$

Поскольку это уравнение записано для произвольного объема, то равенство справедливо для подынтегральных выражений тоже:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\operatorname{div} \vec{j} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Это и есть *уравнение непрерывности*, или *уравнение неразрывности*, выражающее в дифференциальной форме *закон сохранения заряда*: изменение заряда в единицу времени в объеме равно потоку заряда через поверхность окружающую этот объем. Или ближе к дифференциальной форме записи можно сказать, что изменение плотности заряда в данной точке (элементе объема) приводит к “рождению” линий тока из этой точки.

Если токи стационарны (постоянны во времени), тогда $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ и из (3.1.13) получаем $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ или $\oint \vec{j} d\vec{S} = 0$. Если поток вектора \vec{j} через любую замкнутую поверхность равен нулю, то это означает, что силовые линии плотности тока замкнуты, т.е. не имеют источников.

3.1.3. Максвелловское время релаксации.

Ранее, мы говорили об отсутствии в проводнике объемных зарядов в равновесном состоянии, поскольку, при появлении объемного заряда в проводниках возникает ток, который идет до тех пор, пока заряд в объеме не исчезнет. Если имеем уединенный проводник, то весь сообщаемый заряд располагается на поверхности. Равновесное состояние возникает тогда, когда электрическое поле и объемный заряд внутри проводника равны нулю.

Установление нейтральности заряда в проводниках происходит очень быстро. Рассмотрим изменение величины объемного заряда во времени. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ создана некоторая объемная плотность стороннего заряда $\rho(0) \neq 0$. Воспользуемся законом сохранения заряда (3.1.13) и законом Ома в дифференциальной форме (3.1.8):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \sigma_R \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma_R \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (3.1.14)$$

где воспользовались, что для однородного проводника проводимость постоянна $\sigma_R = \text{const}$. Вспоминая, что $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -4\pi\sigma_R\rho, \quad (3.1.15)$$

решением которого является следующая экспоненциальная функция

$$\rho(t) = \rho(0) \exp(-4\pi\sigma_R t) = \rho(0) \exp\left(-\frac{4\pi}{\rho_R} t\right) \quad (3.1.16)$$

Таким образом, плотность заряда со временем падает по экспоненциальному закону. Характерное время – *время релаксации (Максвелловское)* – определяется моментом, когда плотность заряда падает в e раз:

$$\tau = \frac{1}{4\pi\sigma_R} \quad (3.1.17)$$

В проводящих средах время релаксации составляет $\sim 10^{-14}$ с. Эта величина на несколько порядков больше, чем время, получаемое из (3.1.17) ($\sim 10^{-17} \div 10^{-19}$ с), поскольку последняя оценка пренебрегает инерционностью разбегающихся зарядов.

Примечание 2. Если среда характеризуется диэлектрической проницаемостью ϵ , то время релаксации умножается на эту величину. В системе СИ (3.1.17) имеет вид: $\tau = \epsilon_0 \epsilon / \sigma_R$.

3.1.4. Опыты Стюарта и Толмена.

Предположение о том, что в металлах носителями тока являются свободные, т.е. сравнительно слабо связанные с ионами кристаллической решетки электроны, было проверено экспериментально. Если бы в переносе электрического заряда в металлах участвовали ионы, то электрический ток сопровождался бы электролизом и связанным с ним переносом вещества. К. Рикке в течение года пропускал электрический ток через поставленные друг на друга медный, алюминиевый и снова медный цилиндры. Общий заряд, прошедший через эту систему, составил 3.5 миллиона *Кулонов*, однако никакого проникновения металлов друг в друга обнаружено не было, и вес цилиндров сохранился с точностью до $\pm 0,03$ мг. Еще более определенное заключение о природе носителей тока в металлах позволяют сделать опыты с возбуждением электрического тока с помощью сил инерции.

Идея опытов Р. Толмена и Т. Стюарта (1916г.) состояла в следующем: разогнать кусок металла, концы которого соединены с гальванометром, до большой скорости v_0 и потом быстро затормозить.

При торможении свободные носители заряда испытывают “ускорение” $w = -dv/dt$. Торможение свободных носителей происходит за счет электрического поля неподвижных зарядов. При этом эффективное электрическое поле, действующее на заряд e , равно:

$$E = \frac{F}{e} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} \quad (3.1.18)$$

Свободные заряды останавливаются не мгновенно, а проходят некоторое расстояние, то есть возникает некоторый ток. Плотность тока получаем в виде:

$$j = \frac{E}{\rho_R} = -\frac{m}{e\rho_R} \frac{dv}{dt} \quad (3.1.19)$$

Тогда полное количество электричества, которое пройдет через гальванометр, определяется зарядом, смещенным за все время торможения через сечение S , т.е. равно

$$Q = S \int_{v_0}^0 \left(-\frac{m}{e}\right) \frac{1}{\rho_R} \frac{dv}{dt} dt = \frac{m}{e} \frac{v_0 S}{\rho_R} \quad (3.1.20)$$

Реально в опытах Стюарта и Томсона использовались катушки из металлической (медной, алюминиевой и серебряной) проволоки, длиной до 500 м, которые приводились в быстрое вращение вокруг своей оси (линейная скорость достигала $v_0 = 300$ м/с). Концы проволочной обмотки были соединены с очень чувствительным баллистическим гальванометром длинными гибкими проводами, скручивающимися во время вращения катушки. При помощи специальных неподвижных катушек с электрическим током магнитное поле Земли было настолько тщательно скомпенсировано, так что во вращающейся катушке при её равномерном движении гальванометр не обнаруживал никаких индукционных токов. Убедившись в этом, экспериментаторы быстро тормозили вращение катушки, тогда гальванометр тотчас же отклонялся. Количество электричества, протекшего через гальванометр, описывается уравнением

$$q = \frac{mlv}{eR}, \quad (3.1.21)$$

где l – длина проволоки в катушке; v – линейная скорость вращения; R – общее сопротивление цепи. Направление отклонения гальванометра показало, что носителями тока в металлах являются отрицательные заряды. Удельный заряд $\frac{m}{e}$ в пределах ошибок измерений оказался таким же, как и у электронов в опытах с катодными лучами. Это указало на то, что носителями тока в проводниках являются электроны.

Примечание 3. Карл Виктор Рикке, немецкий физик, 1845-1915.

Ричард Чейз Толмен (Richard Chase Tolman) американский физик-математик и физико-химик, 1881 -1948.

Томас Д. Стюарт, американский физик, 1890 -1958.
