3.2. Классическая электронная теория проводимости.

Можно ли понять экспериментальные закономерности электрического тока, исходя из известных классических представлений о движении зарядов и структуре вещества? В этом параграфе мы рассмотрим простую микроскопическую модель, позволяющую объяснить опытные законы для тока в электрической цепи – *законы Ома и Джоуля - Ленца*.

3.2.1. Модель проводника. Закон Ома.

Рассмотрим следующую модель *металла* (или проводника): в объеме, созданном положительными ионами (ионной решеткой), находятся свободные электроны, которые, можно считать, слабо связанными с ионами. В отсутствии внешнего электрического поля свободные электроны движутся хаотически со средней кинетической (тепловой) энергией

$$\frac{m\langle v^2\rangle}{2}=\frac{3}{2}kT\,.$$

Оценим среднюю квадратичную скорость этих электронов при нормальной температуре (T = 300°K):

$$\sqrt{\langle v^2\rangle}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3\cdot 1.38\cdot 10^{-16}\cdot 300}{9\cdot 10^{-28}}}\approx\sqrt{\frac{10^{-14}}{10^{-28}}}\approx 10^{7}\frac{cm}{c}\approx 100\frac{km}{c} \qquad (3.2.1)$$

Включаем внешнее электрическое поле, тогда на электрон действует сила

$$\vec{F}=-e\vec{E}=m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (3.2.2)$$

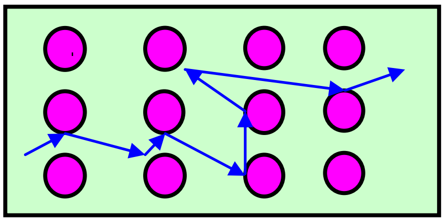

Рис. 2.1.

Под действием этой силы у электронов начинается упорядоченное движение. Движение электрона в действительности оказывается очень сложным (рис. 2.1), т. к. упорядоченное движение электронов под влиянием внешнего поля накладывается на хаотическое. При этом взаимодействие электрона с решеткой (столкновение с ионами решетки) играет важную роль. Полная скорость движения вдоль выбранного направления поля по оси x равна сумме хаотической скорости v_x и скорости упорядоченного движения u, называемой *скоростью дрейфа*:

$$v=v_x+u \qquad (3.2.3)$$

Более точно нужно рассматривать уравнение движения вдоль оси x – уравнение Ньютона:

$$F_0-eE=m\frac{d}{dt}\left(v_x+u\right) \qquad (3.2.4)$$

Здесь F_0 – проекция на ось x суммарной силы, действующей на электрон со стороны ионов и других электронов, определяющая, в частности, столкновения с ними. Обычно $u \ll v_x$. Если усреднить уравнение (3.2.4) по всем электронам, то средняя проекция хаотической скорости равна нулю

$$\left\langle\frac{dv_x}{dt}\right\rangle=0\,,$$

при этом появится также средняя сила взаимодействия электронов с ионами $\langle F_0\rangle$, которая “отбирает” энергию у электронов, приобретенную в электрическом поле.

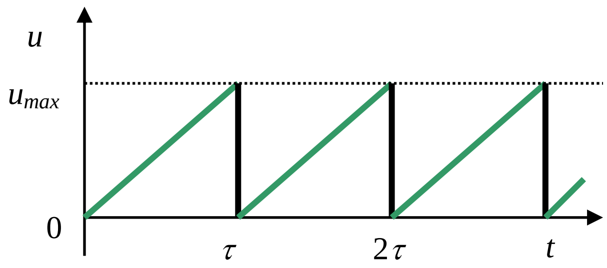

Рис. 2.2.

Нас интересует только упорядоченное движение зарядов – *ток*, поэтому сложную картину передачи энергии от электронов ионам (воздействие $\langle F_0\rangle$) заменим более простой. А именно, рассматриваем следующую модель. Электрон ускоряется под влиянием поля в течение времени τ, приобретает скорость упорядоченного движения u_{max}, затем сталкивается с атомом (ионом) решетки и передает ему всю приобретенную энергию, полученную от ускоряющего поля. А затем вновь разгоняется до скорости u_{max}, сталкивается с новым ионом и т.д. Если построить график зависимости *дрейфовой скорости* u от времени, то получим пилообразную кривую (см рис. 2.2). Для такой модели имеются веские основания, поскольку электрон обладает скоростью теплового движения (в соответствие с распределением Максвелла), существенно большую u_{max}, и после очередного столкновения он просто «забывает» об упорядоченном движении.

На рис.2.2 временной интервал τ – *время релаксации* неравновесного распределения электронов (заряда) к тепловому равновесию с кристаллической решеткой, оно характеризует скорость возвращения к этому равновесию. С другой стороны, τ имеет смысл среднего времени между столкновениями, т.е. времени свободного пробега:

$$\tau = \frac{\langle l \rangle}{\langle v \rangle},$$

где $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега, а $\langle v \rangle$ – средняя скорость беспорядочного (теплового) движения. При этом частота столкновений определяется величиной обратной времени между столкновениями τ^{-1}. Таким образом, действие силы $\langle F_0 \rangle$ сводится к “сбрасыванию” приобретенной скорости u через каждые τ секунд. А в течение τ секунд упорядоченное движение определяется только силой электрического поля eE, т.е. электрон движется с постоянным ускорением $a = {eE}/{m}$.

Тогда средний путь, проходимый электроном от одного столкновения до последующего столкновения, равен

$$S = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{eE}{2m}\tau^2 \tag{3.2.5}$$

Средняя скорость дрейфа равна

$$u = \frac{S}{\tau} = \frac{eE}{2m}\tau = \frac{eE\langle l \rangle}{2m\langle v \rangle} \tag{3.2.6}$$

Скорость упорядоченного движения u обратно пропорциональна частоте соударений

$$\frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle} = \frac{1}{\tau},$$

т.е. уменьшается с ростом температуры. Итак, используя (3.2.6) и формулы для определения плотности тока (3.1.2), получаем для плотности тока следующее выражение:

$$\vec{j} = ne\vec{u} = \frac{ne^2\langle l \rangle}{2m\langle v \rangle}\vec{E} = \sigma_R \vec{E} \tag{3.2.7}$$

Таким образом, получили закон Ома в дифференциальной форме. Из (3.2.7) проводимость определяется из следующей формулы:

$$\sigma_R = \frac{ne^2\langle l \rangle}{2m\langle v \rangle} \tag{3.2.8}$$

Итак, *классическая проводимость* прямо пропорциональна плотности носителей заряда, квадрату величины заряда и обратно пропорциональна квадратному корню из температуры: $\sigma_R \sim n, e^2, T^{1/2}$.

Часто вводится понятие *подвижности носителей* заряда, как отношение скорости дрейфа к напряженности электрического поля:

$$\mu = \frac{\langle u \rangle}{E} \tag{3.2.9}$$

При этом получаем связь между подвижностью и проводимостью:

$$\vec{j} = en\langle \vec{u} \rangle = en\mu\vec{E} = \sigma_R \vec{E}$$

$$\mu = \frac{\sigma_R}{en} = \frac{e\langle l \rangle}{2m\langle v \rangle} \tag{3.2.10}$$

Опыт дает для подвижности электронов в металлах: $\mu_e \sim (10^{-4} - 10^{-3})$ $м^2/В\cdot с$ (в системе *СИ*). Отсюда также видно, что скорость дрейфа в металлах, в самом деле, значительно меньше средней скорости теплового движения. Если имеется несколько сортов носителей, то у каждого из них своя подвижность μ_i и тогда проводимость проводника равна:

$$\sigma_R = \sum_i q_i n_i \mu_i \tag{3.2.11}$$

Рассмотрим кратко *единицы измерения* введенных величин. В системе *CGSE* удельное сопротивление измеряется в секундах:

$$\rho_R = \frac{E}{j} = \frac{заряд/см^2}{заряд/с \cdot см^2} = с\,.$$

Для металлов, к примеру, меди Cu $\rho_R \sim 10^{-17}$ *с* (металл), для стекла $\rho_R \sim 10^3$ *с* (диэлектрик). В системе СИ удельное сопротивление измеряется в *Ом·м*. Подробнее о системах единиц для электрических величин рассмотрим далее в §3.5. Здесь же в Таблице уместно привести единицы заряда, тока, сопротивления и связи между ними в двух системах единиц:

Физические величины	***CGSE***	***СИ***	**Связь единиц**
Заряд q	$1\ CGSE_q$	$1\ Кл$	$1\ Кл = 3\cdot10^9\ CGSE_q$
Ток I	$1\ CGSE_I$	$1\ А = 1\ Кл\ /1\ с$	$1\ А = 3\cdot10^9\ CGSE_I$
Плотность тока j	$1\ CGSE_j$	$1\ А/м^2$	$1\ А/м^2 = 3\cdot10^5\ CGSE_j$
Разность потенциалов U	$1 CGSE_\varphi = 1\ CGSE_q\ /см$	$1\ В = 1\ Дж\cdot Кл^{-1}$	$1\ В = 1/300\ CGSE_\varphi$
Сопротивление R	$1\ CGSE_R$	$1\ Ом = 1\ В\cdot А^{-1}$	$1\ Ом = 1/9\cdot10^7\ CGSE_R$
Удельное сопротивление ρ_R	$1\ CGSE_\rho = 1\ с$	$1\ Ом\cdot м$	$1\ Ом\cdot м = 1/9\cdot10^9\ CGSE_\rho$
Удельная проводимость σ_R	$1\ CGSE_\sigma = 1\ с^{-1}$	$1\ См\cdot м^{-1} = 1\ Ом^{-1} м^{-1}$	$1\ См\cdot м^{-1} = 9\cdot10^9\ CGSE_\sigma$

3.2.2. Закон Джоуля - Ленца.

Итак, в рамках рассматриваемой модели за время τ электрон набирает максимальную скорость $u_{max} = a\tau = \frac{eE}{m}\frac{\langle l\rangle}{\langle v\rangle}$ и приобретает, соответственно, кинетическую энергию, равную

$$W_K = \frac{mu_{max}^2}{2} = \frac{1}{2} m \frac{e^2E^2\langle l\rangle^2}{m^2\langle v\rangle^2} = \frac{e^2E^2\langle l\rangle^2}{2m\langle v\rangle^2} \tag{3.2.12}$$

Частота столкновений одного электрона с атомами определяется обратным временем свободного пробега:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{<v>}{<l>}\,.$$

Тогда полное число соударений электронов в единице объема и в единицу времени ν зависит от числа электронов в единице объема (прямо пропорционально концентрации n) и определяется:

$$\nu = \frac{n\langle v\rangle}{\langle l\rangle} \tag{3.2.13}$$

Каждый акт соударения сопровождается передачей набранной кинетической энергии упорядоченного движения W_K атомам или ионам проводника. Следовательно, в рамках принятой модели выделяемая теплота в единице объема за единицу времени, т.е. объемная плотность мощности, равна:

$$\frac{dw}{dt} = W_K\frac{n\langle v\rangle}{\langle l\rangle} = \frac{e^2n\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle}E^2 = \sigma_R E^2 \tag{3.2.14}$$

Здесь мы воспользовались уже определенным ранее выражением для проводимости (3.2.8). Итак, получаем закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме

$$\frac{\delta Q}{dtdV} = \frac{dw}{dt} = \sigma_R E^2 = \frac{j^2}{\sigma_R} = \rho_R j^2 \tag{3.2.15}$$

Мощность тепла, выделяемого в единице объема пропорциональна квадрату плотности электрического тока и обратно пропорциональна удельной проводимости.

Переход к обычной записи закона Джоуля - Ленца для участка цепи осуществляется интегрированием по объему провода

$$\frac{dQ}{dt}=\int\frac{j^2}{\sigma_R}dV=\int\frac{j^2}{\sigma_R}Sdl=I^2\int\frac{dl}{\sigma_R S}=I^2R \qquad (3.2.16)$$

где S – поперечное сечение провода, dl – элемент длины и R – сопротивление рассмотренного участка провода.

3.2.3. Закон Видемана - Франца. Недостатки классической теории.

В итоге классическая теория смогла объяснить, по крайней мере, качественно опытные законы Ома и Джоуля - Ленца. Что касается количественного согласия, дело обстоит гораздо хуже. Однако отметим, что классические представления и не должны были обеспечивать количественного согласия с экспериментальными законами, поскольку движение электронов в веществе относится к явлениям микромира, которые описываются в рамках квантовой физики.

Тем не менее, классическая теория смогла объяснить еще один результат, который случайно хорошо согласуется с опытом. И хотя классический вывод этого соотношения неверен, сам результат оказался правильным, поэтому приведем его.

Металлы – хорошие проводники не только электричества, но и тепла. В рамках той же модели металла переносчиками электричества и тепла в металлах являются одни и те же частицы – электроны. Поэтому основной механизм теплопроводности должны обеспечивать свободные электроны. При этом роль ионов в переносе тепла пренебрежимо мала. В курсе Молекулярной физики (см Глава 5, §5.3, формула (5.3.4)) было получено следующее выражение для коэффициента теплопроводности:

$$\chi=\frac{1}{3}n\langle v\rangle\langle l\rangle\frac{i}{2}k=\frac{1}{3}n\langle v\rangle\lambda\frac{C_V}{N_A}=\frac{1}{3}n\langle v\rangle\lambda c_V \qquad (3.2.17)$$

где n и ρ – концентрация и плотность электронов, $\langle l\rangle=\lambda$ – длина свободного пробега электрона. Здесь C_V и $c_V=ik/2$ – молярная теплоемкость и теплоемкость на 1 электрон, соответственно, i – число степеней свободы ($i=3$ для электрона), k – постоянная Больцмана (k=1.3807·10^{-16} *Эрг/К* =1.3807·10^{-23} *Дж/К*), N_A – число Авогадро (N_A=6.022·10^{23} *моль*$^{-1}$). Найдем отношение коэффициента теплопроводности (3.2.17) и удельной электропроводности (3.2.8):

$$\frac{\chi}{\sigma_R}=\frac{\frac{1}{3}n\langle v\rangle\lambda\frac{3}{2}k}{\frac{1}{2}\frac{e^2n}{m}\frac{\lambda}{\langle v\rangle}}=\frac{m\langle v\rangle^2k}{e^2} \qquad (3.2.18)$$

В рамках рассматриваемой приближенной теории учитывать разницу между средней скоростью и среднеквадратичной скоростью есть превышение точности, поэтому можно положить $\langle v\rangle^2\approx\langle v^2\rangle$ и $\frac{m\langle v\rangle^2}{2}=\frac{3}{2}kT$. Тогда отношение (3.2.18) принимает вид:

$$\frac{\chi}{\sigma_R}=3\left(\frac{k}{e}\right)^2T \qquad (3.2.19)$$

Это *закон Видемана-Франца* – отношение коэффициента теплопроводности и удельной электропроводности для всех металлов одно и то же:

$$\frac{\chi}{\sigma_R}=2.23\cdot10^{-8}T \qquad (3.2.21)$$

и зависит только от температуры.

Оказалось, что закон Видемана-Франца находится в хорошем согласии с опытом. Как далее оказалось, это согласие – случайное для классического описания. При нашем модельном описании мы не учитывали Максвелловское распределение электронов по скоростям, что на самом деле необходимо сделать. В рамках классического описания Л.Лоренц учел его и получил вместо “3” фактор “2”, что только ухудшило согласие с экспериментом. Зоммерфельд показал, что квантовая теория дает коэффициент $\pi^2/3$, что хорошо совпадает с простейшим классическим результатом “3”.

Вообще классическая модель наглядна и дает правильные качественные зависимости, выражаемые законами Ома, Джоуля – Ленца, Видемана – Франца. Однако она не приводит к правильным количественным результатам. Рассмотрим, в чем состоят основные *расхождения* и недостатки классической теории:

1) Оказалось, что чтобы получить правильные значения электропроводности σ_R, необходимо принимать очень большие значения длины свободного пробега электронов, на три порядка превышающие межатомные расстояния, что не находит убедительного объяснения в классической физике.
2) Классическая теория предсказывает также другую зависимость удельной проводимости от температуры: $\sigma_R \sim \dfrac{1}{\sqrt{T}}$, в то же время эксперимент дает $\sigma_R \sim \dfrac{1}{T}$.
3) В теплоемкость металлического проводника, согласно “классике”, аддитивный вклад вносят электронный газ $C_v = \dfrac{3}{2}R$ и решетка $C_v = 3R$ (закон Дюлонга и Пти), что в сумме дает $C_v = \dfrac{9}{2}R$. Однако этот результат не находит подтверждения в эксперименте.

Квантовая физика позволяет устранить эти расхождения. Прежде всего, необходимо учитывать различие в поведении микрочастиц и обычных макрочастиц. Квантовая физика допускает, как называли ранее, “дуализм” в поведении микрочастиц, т.е. приписывает им корпускулярные и волновые свойства. Именно последние позволяют “обтекать” атомы без столкновений, что приводит к увеличению длины свободного пробега электронов.

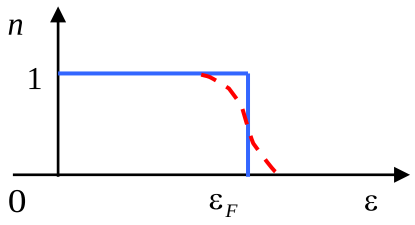

Рис. 2.3.

Распределение электронов по энергиям подчиняется *квантовой статистике Ферми - Дирака* (см рис. 2.3). На рис. 2.3. представлено распределение плотности свободных электронов по энергиям. Согласно статистике Ферми-Дирака, в состоянии с определенной энергией не может находиться более одного электрона. Таким образом, при нуле температуры электроны занимают все возможные нижние энергетические состояния от нуля вплоть до максимальной энергии – *энергии Ферми* ε_F. В образовании электронной проводимости и теплоемкости участвует лишь малая часть электронов, имеющих энергии вблизи *уровня Ферми* ε_F. Именно поэтому электронный газ не вносит существенного вклада в теплоемкость и теплоемкость близка к закону Дюлонга - Пти ().

Квантовая физика предсказывает для температурной зависимости проводимости $\sigma_R \sim 1/T$, что и наблюдается в эксперименте. При сверхнизких температурах (ниже $20\ K$) в металлах наблюдается явление сверхпроводимости, открытое еще в начале века. Однако в конце 80-х годов была обнаружена сверхпроводимость при температурах 90-160 K, причем на керамических материалах. Подобные явления уже не вписываются в картину представлений классической физики, а являются прерогативой физики квантовой. Позже мы вернемся к этим явлениям.

Отметим также, что в разных конденсированных средах – твердых телах, жидкостях, газах, вакууме – реализуется, в принципе, различный механизм проводимости.

Примечание 1. *Густав Генрих Видеман, немецкий физик, 1826–1899.*
Рудольф Франц, немецкий физик, 1827-1902.
Людвиг Валентин Лоренц, датский физик-теоретик, 1829–1891.
Арнольд Иоганн Вильгельм Зоммерфельд, немецкий физик-теоретик, 1868–1951.
Энрико Ферми, итальянский физик, 1901–1954, Нобелевская премия 1938 г. за открытие искусственной радиактивности.
Поль Адриен Морис Дирак, английский физик-теоретик, 1902–1984, в 1933 г. - Нобелевская премия за создание квантовой механики.
Пьер Луи Дюлонг, французский физик и химик, 1785–1838.
Алексис Терез Пти, французский физик, 1791–1820.

3.2.4. Электрические цепи. ЭДС. Законы Кирхгофа.

Для того, чтобы поддерживать ток, необходимо поддерживать электрическое поле и осуществлять круговорот зарядов в цепи, при котором они двигались по замкнутому пути. В замкнутой цепи наряду с участками, на которых положительные носители тока движутся в сторону убывания потенциала, должны быть участки, на которых перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т.е. против сил электростатического поля.

Перемещение носителей на этих участках возможно лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения, называемых *сторонними силами*. Сторонние силы можно характеризовать работой, которую они совершают. Работа, совершенная сторонними силами над единичным положительным зарядом, называется *электродвижущей силой* **(**ЭДС**)**:

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} \tag{3.2.22}$$

Очевидно, что размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала.

Рассмотрим неоднородный участок электрической цепи, содержащий сопротивления и источники ЭДС. Можно также ввести понятие напряженности поля сторонних сил E_{cm} :

$$\vec{E}_{cm} = \frac{\vec{F}_{cm}}{q} \tag{3.2.23}$$

Работа сторонних сил на неоднородном участке электрической цепи 1 – 2 равна

$$A_{cm} = q\int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} \tag{3.2.24}$$

Тогда работа сторонних сил на этом участке цепи по перенесению единичного заряда – ЭДС на участке цепи – равна:

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} \tag{3.2.25}$$

Для замкнутой цепи получаем полную ЭДС в цепи как циркуляция вектора напряженности сторонних сил:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} \tag{3.2.26}$$

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля $\vec{E}$, тогда результирующая сила равна:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{E}_{cm}\right) \tag{3.2.27}$$

Работа, совершаемая этой силой на участке цепи 1 – 2 определяется:

$$A_{12} = q\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q\int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}_{12} \tag{3.2.28}$$

Тогда падение напряжения на этом участке цепи определяется:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \tag{3.2.29}$$

Можно записать закон Ома для неоднородного участка цепи. На неоднородном участке цепи на носители тока действуют электростатические и сторонние силы. Тогда плотность тока записывается

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{cm}\right) \tag{3.2.30}$$

Умножая скалярно вектор плотности тока на вектор элемента проводника длиной dl и вспоминая, что $\sigma_R = 1/\rho_R$, имеем:

$$\vec{j} d\vec{l} = \sigma_R\left(\vec{E} + \vec{E}_{cm}\right) d\vec{l}$$

$$I\rho_R \frac{dl}{S} = \left(\vec{E} + \vec{E}_{cm}\right) d\vec{l} \tag{3.2.31}$$

Интегрируя по всему участку цепи, получаем *закон Ома для участка цепи*:

$$I\int_1^2 \rho_R \frac{dl}{S} = IR = \int_1^2 \left(\vec{E} + \vec{E}_{cm}\right) d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R} \qquad (3.2.32)$$

Если интегрирование распространяется на всю замкнутую цепь, то получаем *закон Ома для полной цепи*:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} + \oint \vec{E}_{cm}d\vec{l} = 0 + \oint \vec{E}_{cm}d\vec{l} = \mathcal{E} = IR \qquad (3.2.33)$$

Здесь мы воспользовались тем, что работа электростатического поля по замкнутому пути, или иначе сумма всех потенциалов в замкнутой цепи, равна нулю.

Разбивая сопротивление всей цепи на сопротивление внешнего участка цепи $R_{внешней}$ и внутреннее r_0 сопротивление источника, или источников, получаем обычную формулу для ЭДС замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = I\left(R_{внешней} + r_0\right) \qquad (3.2.34)$$

На практике для вычисления токов и падений напряжений на различных участках разветвленных электрических цепей полезны правила Кирхгофа, основанные на законах сохранения заряда и энергии. Прежде всего по всей цепи распределяем направление токов на каждом из участков цепи и определяем направление действия ЭДС. Далее используем первое правило Кирхгофа: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*

$$\sum_i I_i = 0 \qquad (3.2.35)$$

Затем применяем второе правило Кирхгофа для обхода замкнутого контура в цепи. Выбирая направление обхода для любого выделенного в цепи замкнутого контура, получаем:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k \qquad (3.2.36)$$

Иначе, *сумма всех падений напряжений на участках выбранного замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре*.

Примечание 2. *Густав Роберт Ки́рхгоф, 1824–1887, немецкий физик, член Берлинской академии наук, с 1862 г. член-корреспондент Санкт-Петербургской академии наук.*
