3.5. Поле движущегося заряда. Закон Био-Савара.

3.5.1. Магнитное поле движущегося заряда.

Если точечный заряд покоится, то он создает в окружающем его пространстве только электрическое поле. Это поле изотропное, и положение заряда определяет центр симметрии электростатического поля. Если заряд движется со скоростью $\vec{v}$, то в пространстве появляется выделенное направление, связанное с направлением этого движения. Поэтому магнитное поле, появляющееся в результате движения заряда, имеет осевую (или аксиальную) симметрию.

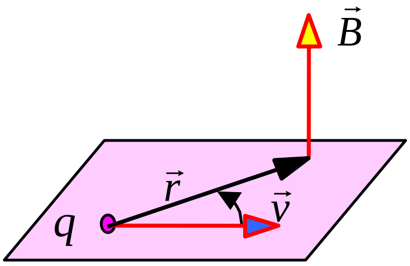

Рис. 5.1.

В результате обобщения экспериментальных данных был получен фундаментальный закон: *точечный заряд q, равномерно движущийся с малой (нерелятивистской $v << c$) скоростью, создает в окружающем пространстве магнитное поле*:

$$\vec{B} = k\frac{q[\vec{v},\vec{r}]}{r^3} \qquad (3.5.1)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения (см рис. 5.1). Конец радиус-вектора $\vec{r}$ неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью $\vec{v}$, поэтому вектор $\vec{B}$ в данной системе отсчета зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени. В соответствии с (3.5.1) вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\vec{v}$ и $\vec{r}$, причем вращение вокруг вектора $\vec{v}$ в направлении вектора $\vec{B}$ образует с направлением $\vec{v}$ правовинтовую систему. Таким образом, по своим свойствам вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ – аксиальный вектор (псевдовектор). При обращении времени меняется направление скорости и соответственно меняется направление магнитного поля.

Примечание 1: В системе $CGSE$ (Гаусса) коэффициент $k = \frac{1}{c}$. В системе *СИ*: $k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\frac{Гн}{м}$.

Электрическое поле неподвижного и движущегося с нерелятивистской скоростью заряда определяется тем же законом Кулона $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$, тогда магнитное поле, созданное таким движущимся зарядом, может быть записано через напряженность электрического поля:

$$\vec{B} = k[\vec{v},\vec{E}] = \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{E}] \qquad (3.5.2)$$

Закон (3.5.1) положен в *основание теории магнетизма*, хотя исторически первым экспериментально было получено выражение для магнитного поля, создаваемого прямым током.

3.5.2. Магнитное поле тока.

Вычислим магнитное поле, создаваемое элементом тока I длиной dl и поперечным сечением S (рис. 5.2). Число носителей в этом элементе равно $nSdl = ndV$, где n – концентрация носителей. Каждый носитель заряда q согласно (3.5.1) создает в окружающем пространстве магнитное поле:

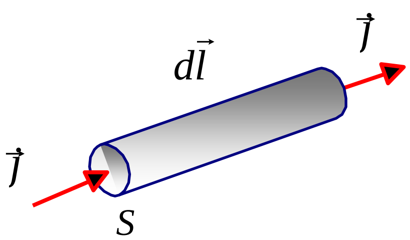

Рис. 5.2.

$$\vec{B}_q = \frac{q}{c}\frac{[(\vec{v}+\vec{u}),\vec{r}]}{r^3}, \qquad (3.5.3)$$

где $\vec{v}$ – скорость хаотического движения, а $\vec{u}$ – скорость направленного движения (дрейфа). Вычисляя магнитное поле элемента тока, мы будем исходить из установленного опытным путем *принципа суперпозиции*. Следуя этому принципу, мы будем считать, что каждый заряд q возбуждает поле, совершенно не зависящее от наличия других зарядов. Усредняя по всем носителям, заключенным в объеме dV,

$$\left\langle \vec{B}_q \right\rangle = \frac{q}{c}\frac{[\vec{u},\vec{r}]}{r^3}, \qquad \langle \vec{v} \rangle = 0 \tag{3.5.4}$$

и умножая на их количество, мы получим магнитное поле созданное элементом тока:

$$d\vec{B} = \left\langle \vec{B}_q \right\rangle nSdl\,;$$

$$d\vec{B} = \frac{qn}{c}\frac{[\vec{u},\vec{r}]}{r^3}dV = \frac{1}{c}\frac{[\vec{j},\vec{r}]}{r^3}dV \tag{3.5.5}$$

Это соотношение составляет содержание *закона Био-Савара*: магнитное поле, создаваемое объемным элементом тока, определяется выражением:

$$d\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{[\vec{j},\vec{r}]}{r^3}dV\,; \tag{3.5.6}$$

Магнитное поле от линейного элемента тока равно:

$$d\vec{B} = \frac{I}{c}\frac{[d\vec{l},\vec{r}]}{r^3}. \tag{3.5.7}$$

Именно последнее выражение было получено Био и Саваром исторически первым. Запись закона Био-Савара в виде соотношения (3.5.1) легко может быть получена из (3.5.7), если ток обратно представить через движение зарядов с дрейфовой скоростью.

Магнитное поле от проводника конечной длины получается путем интегрирования по нему:

$$\vec{B} = \frac{I}{c}\int_L \frac{[d\vec{l},\vec{r}]}{r^3} \tag{3.5.7a}$$

В силу векторного характера последнего выражения интегрирование необходимо проводить по проекциям магнитного поля.

Примечание 2: *Жан Батист Био – французский физик, 1774-1862;*
Феликс Савар – французский физик, 1791-1841)

3.5.3. Примеры магнитных полей.

1) *Магнитное поле прямого тока*

Вычислим магнитное поле прямого тока I, т.е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (см рис. 5.3). Согласно закону Био-Савара в произвольно выбранной точке A векторы $d\vec{B}$ от всех элементов тока $d\vec{l}$ имеют одинаковое направление – на рис. 5.3 (с правой стороны от прямого тока) вектора $d\vec{B}$ направлены за плоскость рисунка. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей dB, причем $Sin\left(\angle\left(d\vec{l},\vec{r}\right)\right) = cos\,\alpha$, и тогда поле от элемента тока $d\vec{l}$ равно:

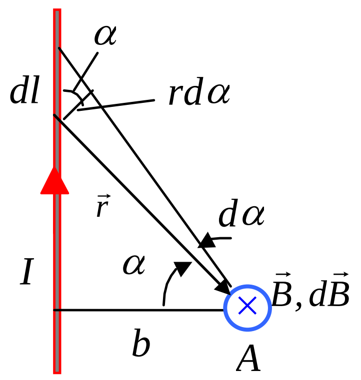

Рис. 5.3.

$$dB = \frac{1}{c}\frac{Idl\,cos\,\alpha}{r^2} \tag{3.5.8}$$

Из рисунка 5.3 следует, что

$$dl\,cos\,\alpha = rd\alpha \qquad \text{и} \qquad r = \frac{b}{cos\,\alpha},$$

где b – расстояние от провода до точки A. Поэтому далее получаем

$$dB = \frac{1}{c}\frac{I\,cos\,\alpha d\alpha}{b}. \tag{3.5.9}$$

Интегрируя последнее выражение по всем элементам бесконечно длинного тока, что эквивалентно интегрированию по углу α от $-\pi/2$ до $\pi/2$, находим индукцию магнитного поля прямого тока:

$$B = \frac{2I}{cb} \qquad (3.5.10)$$

Магнитное поле, создаваемое прямым током, прямо пропорционально силе тока и обратно пропорционально расстоянию до провода

Примечание 3. В системе *СИ* магнитное поле прямого тока равно $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}$.

----

2) *Сила взаимодействия 2-х параллельных токов*

Пусть имеем два параллельных тока, расположенных на расстоянии R (рис. 5.4). Поле, создаваемое прямым током I_1 на расстоянии R от него, согласно (3.5.10) равно

$$B = \frac{2I_1}{cR}.$$

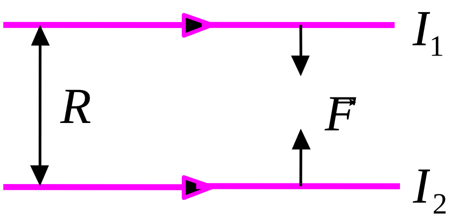

Рис. 5.4.

Тогда сила, действующая на элемент dl прямого тока I_2 со стороны первого тока, согласно закону Ампера (3.4.14), равна

$$dF = \frac{1}{c} I_2 B dl = \frac{2I_1 I_2}{c^2 R} dl.$$

Здесь учтено, что угол между направлением магнитного поля и элементом dl тока I_2 равен $\frac{\pi}{2}$. Итак, *сила взаимодействия на единицу длины* проводника (притяжения или отталкивания зависит от взаимного направления токов) равна:

$$f = \frac{dF}{dl} = \frac{2I_1 I_2}{c^2 R} \qquad (3.5.11)$$

Примечание 4. Сила взаимодействия 2-х токов на единицу длины в системе *СИ* записывается:

$$f = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi R.$$

Важно отметить, что последнее соотношение используется для определения единицы тока в системе *СИ* – *Ампера* (см ниже п.3.5.4).

В общем случае силу взаимодействия двух элементов тока может быть записано в следующем виде:

$$d\vec{F} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{\left[d\vec{l}_1, \left[d\vec{l}_2, \vec{r}\right]\right]}{r^3} \qquad (3.5.12)$$

где $|\vec{r}|$ – расстояние между двумя элементами тока $I_1 d\vec{l}_1$ и $I_2 d\vec{l}_2$.

3) *Магнитное поле кругового тока*

Вычислим магнитное поле, создаваемое круговым током на его оси. Выберем точку A на оси контура на расстоянии z от центра контура. На круговом контуре с током выделим (на рис. 5.5) элемент тока Idl. Этот элемент будет создавать в точке A поле $d\vec{B}$, направление вектора которого перпендикулярно плоскости образованной элементом контура $d\vec{l}$ и вектором $\vec{r}$. Все элементы кругового тока будут создавать в рассматриваемой точке “конус” векторов индукции $d\vec{B}$. Понятно, что в результате осевой симметрии результирующий вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$, создаваемого в точке A круговым током, будет направлен вверх по оси z. Поэтому

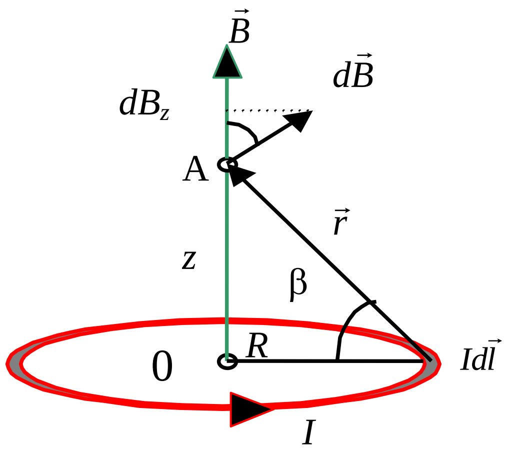

Рис. 5.5.

для нахождения модуля вектора $\vec{B}$ надо сложить проекции векторов $d\vec{B}$ на ось z. Каждая такая проекция равна

$$dB_z = dB\cos\beta = \frac{1}{c}\frac{Idl}{r^2}\cos\beta,$$

где учтено, что угол между элементом $d\vec{l}$ и радиус-вектором $\vec{r}$ равен $\frac{\pi}{2}$. Интегрируя это выражение по dl (это дает множитель $2\pi R$), и, учитывая, что

$$\cos\beta = R/r, \; r = \sqrt{z^2 + R^2},$$

получаем, что поле на оси витка на расстоянии z от его центра равно:

$$B = \frac{1}{c}\frac{2\pi R^2 I}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} \qquad (3.5.13)$$

В частности, в центре витка имеем магнитную индукцию, равную:

$$B_{z=0} = \frac{1}{c}\frac{2\pi I}{R} \qquad (3.5.14)$$

Примечание 5. В системе *СИ* имеем $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$ и в центре витка $B_{z=0} = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

3.5.4. О системах единиц.

Закон взаимодействия токов (3.5.11) послужил основой для определения электромагнитных единиц.

1) Напомним вначале, как строится система *СГСЭ* (*CGSE*). Основные единицы: *см*, *г*, *с*, а *единица заряда* $CGSE_q$, определяется из закона Кулона $F = q_1q_2/r^2$. Следовательно, магнитные величины уже не произвольны. Так, сила, действующая на 1 длины провода с током в магнитном поле другого тока, равна

$$f = \frac{dF}{dl} = k\frac{2I_1I_2}{R}$$

Из этого закона взаимодействия токов получаем, что константа k имеет размерность. Ее размерность легко определить (размерность R и dl совпадают):

$$[k] = \frac{[F]}{[I]^2} = \frac{\textit{сила}}{\textit{квадрат тока}} = \frac{\left[q^2/r^2\right]}{[q/t]^2} = \left[\frac{t}{r}\right]^2 = \frac{\textit{квадрат времени}}{\textit{квадрат длины}} = \frac{c^2}{\textit{см}^2} \qquad (3.5.15)$$

То есть размерность k равна обратному квадрату скорости. Опыты показали, что

$$k = \frac{1}{c^2}. \qquad (3.5.16)$$

Здесь константа c – *электродинамическая постоянная*, которая равна скорости света в вакууме $c \approx 3\cdot10^{10}$ *см/с*. Максвелл показал, что свет – это электромагнитная волна. Далее отсюда строятся все единицы магнитных величин в системе *СГСЭ*. Напоминаем, что в системе *CGSE* имеем законы Лоренца (Ампера) и Био-Савара в виде:

$$\vec{F} = \frac{q}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right], \qquad \vec{B} = \frac{q}{cr^3}\left[\vec{v},\vec{r}\right]$$

2) Система *СГСМ* (*CGSM*) строится также как *СГСЕ* – основные механические единицы те же: *см*, *г*, *с*, но дальше для введения электромагнитных единиц измерения используют *закон взаимодействия токов* в виде

$$f = \frac{2I_1I_2}{R} \qquad (3.5.17)$$

Здесь $k = 1$ и уравнение (3.5.17) используется для определения единицы тока: 1 $CGSM_{\text{тока}}$. Единица тока $1CGSM_I$ (=1 *Био*) равна такому току, который, протекая по бесконечному проводу, действует на параллельный такой же ток (единицу длины провода), находящийся на расстоянии в 1 *см*, с силой в 2 *Дн*. Итак, в этой системе основной единицей электромагнитных величин является *единица тока*. Тогда в системе *CGSM* имеем законы Ампера и Био-Савара без дополнительных коэффициентов:

$$\vec{F} = q\left[\vec{v},\vec{B}\right], \qquad \vec{B} = \frac{q}{r^3}\left[\vec{v},\vec{r}\right] \tag{3.5.18}$$

Однако в этих соотношениях надо учитывать, что заряды измерены в системе *СГСМ* ($CGSM_q$).

Уравнения (3.5.18) служат для определения единицы индукции поля в *CGSM* – 1 *Гс* (*Гаусс*): 1 *Гс* – один Гаусс есть индукция такого магнитного поля, которое действует на заряд в 1 $CGSM_q$ с силой в 1 *Дн*, если заряд движется перпендикулярно магнитному полю со скоростью 1 *см*/*с*.

$$B = \frac{qv}{r^2}, \qquad 1Гс = \frac{[q]\cdot[v]}{[r]^2} = \frac{1CGSM_q \cdot 1^{см}\!/\!_{с}}{см^2} = \frac{1CGSM_q}{см\cdot с}$$

$$F = qvB, \qquad 1Дн = 1CGSM_q \cdot 1^{см}\!/\!_{с} \cdot 1Гс$$

Исключая отсюда единицу заряда, получим:

$$[B] = [F]^{1/2}[r]^{-1}, \qquad 1Гс = \frac{1Дн^{1/2}}{см} = 1г^{1/2}см^{-1/2}с^{-1}$$

Аналогично получаем все магнитные единицы в системе *СГСМ*.

3) Система *СИ* – основные единицы: *м*, *кг*, *с* и *сила тока* измеряется в *А* (*Амперах*). Основанием определения силы тока является уравнение:

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{r} \tag{3.5.19}$$

Ампер – это сила тока, который, проходя по двум прямолинейным параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии в 1 *м* в вакууме, вызвал бы силу на 1 *м* каждого проводника, равную $2\cdot10^{-7}$ *Н*. Откуда получаем для коэффициента μ_0 следующее значение:

$$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7} = 1.26\cdot10^{-6}\ Г/м \qquad (Генри/метр,\ 1Г = \frac{1м^2\cdot кг}{А^2\cdot с^2}).$$

Единица измерения магнитной индукции – 1 *Тс* (*Тесла*), которая, как уже упоминалось в §3.4, определяется из уравнения $\vec{F} = q\left[\vec{v},\vec{B}\right]$, где все величины записаны в системе *СИ*.

$$1Тс = \frac{1Н}{1Кл\cdot 1м/с} = 1\frac{кг}{А\cdot с^2}$$

Отсюда определяются также все остальные магнитные величины в системе СИ.

4) Запишем связь между единицами заряда и тока в рассмотренных системах единиц. Из сравнения (3.5.11) и (3.5.17) в системах *СГСЕ* и *СГСМ*, а также уравнение (3.5.19) в системе *СИ* с учетом определения Ампера и значения константы μ_0, получаем связь между единицами тока:

$$1Био = 1CGSM_I = c\cdot 1CGSE_I \approx 3\cdot10^{10}\cdot 1CGSE_I = 10\,А$$

Единицы заряда связаны соответственно (см также в электростатике параграф 1.2. формулы (1.2.3) и (1.2.4.):

$$1CGSM_q = c\cdot 1CGSE_q \approx 3\cdot10^{10}\,CGSE_q = 10\,Кл$$

Единицы индукции магнитного поля:

$$1\ Тс = 10^4\ Гс$$

Итак, основные выводы.

Система *СИ* и ее единицы наиболее часто используется в технической физике.

Система *CGSE* (*СГСЕ*) используется для измерения чисто электрических величин: заряд, напряженность и индукция электрического поля, электрического потенциала, емкости, электропроводности и т.д.

Система *CGSM* (*СГСМ*) используется для измерения чисто магнитных величин: напряженность и индукция магнитного поля, магнитного потока, коэффициентов индукции и самоиндукции, магнитных моментов и т.д.

Гаусс объединил системы единиц $CGSE$ и $CGSM$, и эта объединенная система чаще используется в физических исследованиях и работах. *Гауссова система единиц*: все электрические величины (q, I, E, D,…) измеряются в единицах $CGSE$, а магнитные величины (B, H, L, M,…) – в единицах $CGSM$. В этой системе единиц в формулы, куда входят одновременно магнитные и электрические величины, пишут множитель $1/c$ на каждую величину тока I и заряда q. Этот множитель превращает величины I и q, выраженные в единицах $CGSE$, в значения этих величин, выраженные в системе $CGSM$.

Итак, в системе единиц Гаусса соотношения с участием магнитного поля и тока записываются:

$$\vec{B} = \frac{q}{c}\frac{[\vec{v},\vec{r}]}{r^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v},\vec{B}], \qquad d\vec{F} = \frac{I}{c}[d\vec{l},\vec{B}], \qquad f = \frac{2I_1 I_2}{c^2 a} \tag{3.5.20}$$

Фактически мы использовали Гауссову систему единиц при написании формул во всех предыдущих параграфах.