

3.6. Поток и циркуляция вектора магнитной индукции.

3.6.1. Поток вектора магнитной индукции.

Как и любое векторное поле, магнитное поле может быть наглядно представлено с помощью линий вектора магнитной индукции \vec{B} . Их проводят, как и для напряженности электрического поля, так, чтобы касательная к этим линиям в каждой точке совпадала с направлением вектора \vec{B} , а густота линий была бы пропорциональна модулю вектора \vec{B} в данном месте. Геометрическая картина позволяет судить о конфигурации конкретного магнитного поля и значительно облегчает анализ конкретных ситуаций.

Для электростатического поля в Главах 1 и 2 мы получили 2 теоремы: о потоке вектора напряженности электрического поля и его циркуляции как следствие закона Кулона. Поступим точно также для вектора индукции магнитного поля. Определяя поток вектора \vec{B} (“*магнитный поток*”) через поверхность ΔS обычным образом: $\Phi_B = \int_{\Delta S} \vec{B} d\vec{S}$, найдем магнитный поток через замкнутую поверхность. Поскольку для

магнитных полей справедлив принцип суперпозиции, поток геометрической суммы нескольких векторов через любую поверхность равен алгебраической сумме потоков этих векторов. Поэтому достаточно найти поток вектора поля, создаваемого отдельным точечным зарядом, движущимся со скоростью \vec{v} . Поле, создаваемое точечным зарядом, определяется законом Био-Савара (3.5.1)

$$\vec{B} = \frac{q}{c} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} \quad (3.6.1)$$

и *силовые линии* поля имеют вид *концентрических окружностей*, плоскости которых перпендикулярны вектору скорости заряда. Это есть следствие аксиальной симметрии относительно вектора скорости заряда.

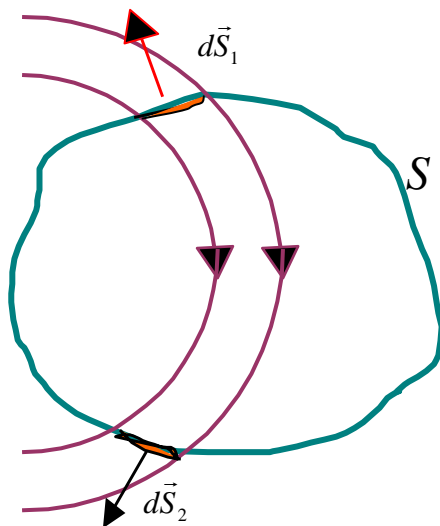


Рис. 6.1.

Произвольная силовая линия, проходящая через любую выбранную замкнутую поверхность, дважды (или четное число раз) пересекает ее (рис. 6.1). То есть потоки в малых окрестностях этих пересечений будут одинаковы по величине и противоположны по знаку, что следует из скалярного произведения вектора индукции поля и внешней нормали к поверхности

$$\vec{B} d\vec{S} = -B_n dS_1 = B_n dS_2.$$

Таким образом, сумма потоков через такие площадки будет равна 0 так же, как и полная сумма потоков через всю замкнутую поверхность. Иначе говоря, сколько силовых линий входит внутрь поверхности, столько и выходит.

Итак, *поток вектора магнитной индукции \vec{B} через любую замкнутую поверхность равен нулю.*

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.6.2)$$

Уравнение (3.6.2) – теорема Гаусса для вектора магнитной индукции. Эта теорема является, по существу, обобщением опыта.

Она отражает тот экспериментальный факт, что линии вектора \vec{B} не имеют ни начала, ни конца. Поэтому число линий, выходящих из объема, ограниченного замкнутой поверхностью S , всегда равно числу линий, входящих в этот объем. Как следствие, поток вектора \vec{B} через произвольную поверхность S , ограниченную некоторым замкнутым контуром, не зависит от формы поверхности S .

Рассматриваемая теорема выражает и тот факт, что *в природе нет магнитных зарядов*, на которых начинались или заканчивались бы линии вектора \vec{B} . Источником магнитного поля являются не магнитные заряды, а электрические токи. Магнитное поле – *соленоидальное* или *вихревое* поле.

Примечание 1. Отсутствие магнитных зарядов – экспериментальный факт. Однако, современная квантовая теория поля предсказывает существование магнитного заряда – монополя Дирака. По теории эти заряды проявляются при очень больших энергиях, не достижимых в нашем обычном макром мире.

Стягивая объем, заключенный внутри поверхности S к интересующей нас точке поля, или воспользовавшись теоремой Гаусса–Остроградского

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV,$$

можем записать теорему Гаусса для вектора \vec{B} в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.6.3)$$

Полученные выражения имеют *фундаментальный характер*: они справедливы не только для постоянных, но и для переменных магнитных полей.

3.6.2. Циркуляция вектора магнитной индукции.

Рассмотрим циркуляцию вектора магнитной индукции по замкнутому контуру $\oint_L \vec{B} d\vec{l}$.

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции: Циркуляция вектора магнитной индукции \vec{B} поля постоянных токов по произвольному замкнутому контуру равна произведению $4\pi/c$ на алгебраическую сумму токов, пронизывающих контур циркуляции.

Рассмотрим эту теорему последовательно, для доказательства применяя метод индукции. Вначале докажем эту теорему для прямого тока I и контура L , лежащего в плоскости, перпендикулярной направлению тока (см рис. 6.2). Согласно закону Био-Савара в каждой точке контура L вектор \vec{B} поля прямого тока I направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку, а его модуль равен

$$B = \frac{1}{c} \frac{2I}{r}, \quad (3.6.4)$$

где r – расстояние от оси тока до интересующей нас точки. Проведем для интересующей нас точки окружность радиуса r (см рис. 6.3, на котором показан вид на контур со стороны тока). Тогда для

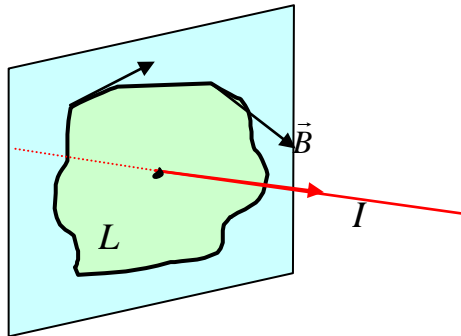


Рис. 6.2.

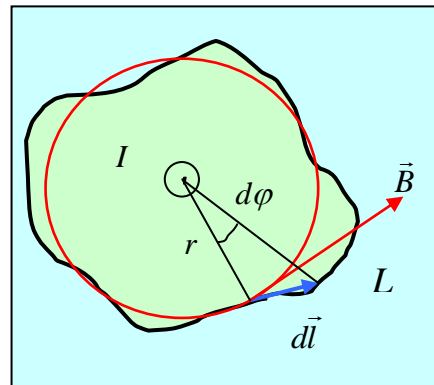


Рис. 6.3.

скалярного произведения имеем:

$$\vec{B} d\vec{l} = B dl_B = \frac{2I}{cr} dl_B = \frac{2I}{c} d\varphi,$$

где $dl_B = r d\varphi$ – проекция вектора $d\vec{l}$ на направление вектора \vec{B} (рис. 6.3). Суммируя по всему контуру, получаем:

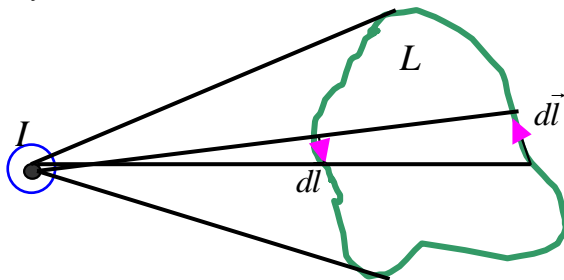


Рис. 6.4.

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{2I}{c} \oint_L d\varphi = \frac{2I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{c} I \quad (3.6.5)$$

Если контур L не охватывает ток I , то, как видно из рис. 6.4, проекции вектора $d\vec{l}$ на направление вектора \vec{B} индукции поля прямого тока I на противоположных сторонах контура будут иметь обратные знаки (на рис. 6.4

направление тока перпендикулярно плоскости листа). В этом случае получаем $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 0$.

Отметим, что в примере выше рассматривался частный случай: прямой ток и плоский контур. Однако полученный результат легко обобщить на произвольно ориентированный относительно направления тока контур L . Так, на рис. 6.5 линии индукции магнитного поля лежат в плоскости, а выбранный контур с

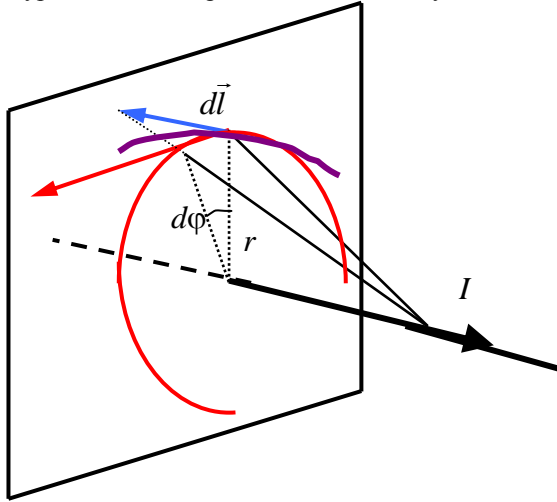


Рис. 6.5.

выделенным элементом $d\vec{l}$ пересекает ее. При этом скалярное произведение равно

$$\vec{B} d\vec{l} = B \cdot dl_p = Br d\varphi.$$

Здесь под элементом угла $d\varphi$ следует понимать проекцию угла, под которым виден элемент контура $d\vec{l}$, на плоскость, перпендикулярную направлению тока. Поэтому при интегрировании по всему контуру мы вновь получаем выражение (3.6.5). Чтобы обобщить полученный результат на случай произвольных прямолинейных токов достаточно воспользоваться принципом суперпозиции для вектора магнитной индукции \vec{B} .

Справедливость теоремы для криволинейных токов следует из дифференциального характера закона, который будет получен в следующем пункте.

Итак, получаем теорему о циркуляции вектора

магнитной индукции

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \sum_i I_i \quad \text{или} \quad \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I \quad (3.6.6)$$

где I – полный ток, охватываемый контуром и равный алгебраической сумме всех токов, проходящих через контур.

При применении формулы (3.6.6) следует учитывать следующее:

1. Токи, проходящие через контур, суммируются алгебраически.
2. Положительное направление обхода образует праввинтовую систему с направлением тока.
3. Изменение направления обхода контура изменяет знак в правой части уравнения.
4. Токи, не охватываемые контуром, не дают вклада в сумму, стоящую в правой части уравнения.

Если токи распределены непрерывно внутри контура, то полный ток через контур равен:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (3.6.7)$$

где S – площадь поверхности, опирающейся на контур L , \vec{j} – объемная плотность тока. В этом случае теорема о циркуляции принимает вид:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (3.6.8)$$

Иногда теорему о циркуляции вектора \vec{B} называют *законом полного тока*. Тот факт, что циркуляция вектора \vec{B} , вообще говоря, не равна нулю, означает, что магнитное поле не потенциально (в отличие от электростатического поля). Такое поле называют *вихревым* или *соленоидальным*.

3.6.3. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции.

Полный ток через поверхность, охватываемую контуром L , определяется (3.6.7). К дифференциальной форме теоремы о циркуляции можно также перейти, воспользовавшись теоремой Стокса: *циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через поверхность, опирающуюся на этот контур*:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S}. \quad (3.6.9)$$

От интеграла, выражающего циркуляцию вектора \vec{B} по замкнутому контуру, переходим к интегралу по поверхности, определяющему поток $\text{rot} \vec{B}$. Тогда

$$\int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

и в силу произвольности выбора контура L и, следовательно, поверхности S получаем дифференциальную запись закона полного тока:

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3.6.10)$$

Теорема о циркуляции, представленная в виде (3.6.10), имеет дифференциальный характер и справедлива в каждой точке. Отсюда следует, что она справедлива для произвольного поля, хотя в предыдущем пункте было получено для поля, порождаемого током, текущим по прямолинейному бесконечному проводнику. Отсюда можно доказать теорему о циркуляции в интегральном виде для произвольных токов (а не только прямолинейных), рассуждая в обратном порядке: берем любую поверхность, интегрируем, используем теорему Стокса и получаем (3.6.8).

Теорема о циркуляции вектора \vec{B} , выраженная в дифференциальной форме (3.6.10), ясно показывает, что магнитное поле является **вихревым** в тех областях, где текут токи, и **безвихревым**, где токов нет. В последнем случае, где нет токов, т.е. $\vec{j} = 0$, вектор \vec{B} может быть представлен (по аналогии с электростатикой) в виде градиента **магнитного потенциала**. Такое представление невозможно в тех областях, где текут токи. Там понятие магнитного потенциала лишено смысла. Действительно, известно дифференциальное тождество $\text{rot grad} \varphi_m \equiv 0$, какова бы ни была функция φ_m . Тогда, если $\vec{B} = -\text{grad} \varphi_m$, то $\text{rot} \vec{B} = 0$ и $\vec{j} = 0$, что лишено смысла.

Примечание 2. В системе *СИ* получаем теорему о циркуляции в следующем виде:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

3.6.4. Примеры вычисления магнитных полей.

Теорема о циркуляции справедлива для любого контура, она есть отражение фундаментального закона об отсутствии магнитных зарядов и как следствие вихревом характере магнитного поля и замкнутости его силовых линий. Для расчета индукции магнитного поля в конкретных случаях теорему о циркуляции удобно использовать, когда рассматриваются симметричные конфигурации электрического тока и искомую индукцию \vec{B} можно вынести за знак интеграла. Рассмотрим ряд примеров.

1) Рассмотрим длинный пустотелый проводящий цилиндр радиусом R , по поверхности которого течет ток I (рис.6.6). Найдем поле внутри и снаружи цилиндра с помощью теоремы о циркуляции (3.6.8), выбирая контур интегрирования в виде концентрической окружности, на которой индукция магнитного поля постоянна в силу симметрии.

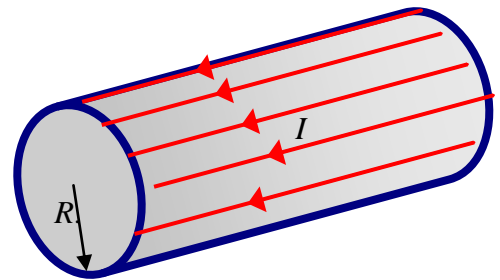


Рис. 6.6.

А. Поле внутри цилиндра: токов нет – поле равно 0:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = 0, \quad \vec{B} = 0.$$

Б. Поле снаружи цилиндра:

$$\text{имеем } \oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I; \text{ и далее } B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I;$$

$$B = \frac{1}{c} \frac{2I}{r}. \quad (3.6.11)$$

Естественно, что полученное выражение совпадает с формулой (3.5.10) для индукции, созданной бесконечным прямолинейным током I .

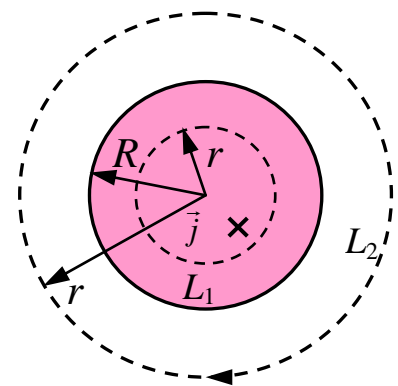


Рис. 6.7.

- 2) Рассмотрим прямолинейный бесконечный провод радиусом R с постоянной по сечению плотностью токов \vec{j} . На рис. 6.7 показан перпендикулярный срез провода, причем ток течет за плоскость рисунка. Рассмотрим магнитное поле внутри и снаружи проводника.

А. Поле внутри провода: магнитные силовые линии внутри провода – коаксиальные окружности.

Циркуляция вектора \vec{B} по круговому контуру L_1 радиусом r вдоль силовой линии равна:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I; \quad B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \pi r^2 j.$$

Откуда поле внутри провода определяется током, проходящим через плоскость контура L_1 , и его величина пропорциональна расстоянию r от оси:

$$B = \frac{1}{c} 2\pi jr. \quad (3.6.12)$$

Б. Поле снаружи провода легко найти через циркуляцию вектора магнитной индукции по контуру L_2 и определяется формулой (3.6.11), где берется полный ток, текущий через все сечение провода:

$$B = \frac{1}{c} \frac{2I}{r}$$

Итак, магнитная индукция падает с расстоянием до провода по закону $1/r$.

- 3) Поле внутри длинного соленоида.

Выберем контур, проходящий внутри соленоида и снаружи, как показано на рис. 6.8. Легко увидеть из симметрии, что поле внутри направлено вдоль оси соленоида, поэтому $\int \vec{B} d\vec{l} = 0$ по перпендикулярным к оси участкам контура.

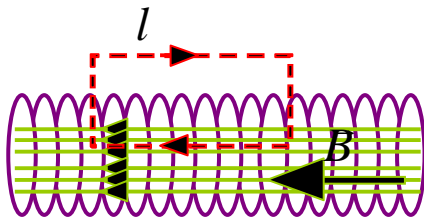


Рис. 6.8.

Вне длинного соленоида поле также равно нулю (можно уйти на бесконечность, где поле всегда равно нулю), поэтому циркуляция индукции магнитного поля по выбранному контуру равна:

$$B \cdot l = \frac{4\pi}{c} n \cdot I \cdot l$$

где n – плотность числа витков (количество на единицу длины), I – ток через соленоид. Итак, поле внутри соленоида равно:

$$B = \frac{4\pi}{c} nI \quad (3.6.13)$$

Магнитное поле внутри длинного соленоида постоянно, таким образом внутри соленоида получаем однородное магнитное поле.