

3.7. Векторный потенциал магнитоэстатического поля. Магнитный момент.

3.7.1. Векторный потенциал. Неоднозначность, калибровка и градиентная инвариантность.

Итак, для описания магнитного поля мы получили уравнения (3.6.3) и (3.6.10). Сравним эти уравнения с уравнениями электростатического поля, найдем отличия и аналогии.

Ранее для электростатического поля мы записали $\text{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ (следствие закона Кулона $E \sim 1/r^2$) и $\text{rot}\vec{E} = 0$ (потенциальность поля). Векторы \vec{E} и \vec{B} силовые характеристики электрического и магнитного полей. Возникает вопрос, можно ли наряду с потенциалом электростатического поля ввести аналогичную величину для поля магнитного, которая являлась бы его энергетической характеристикой и найти уравнение, решением которого она бы являлась.

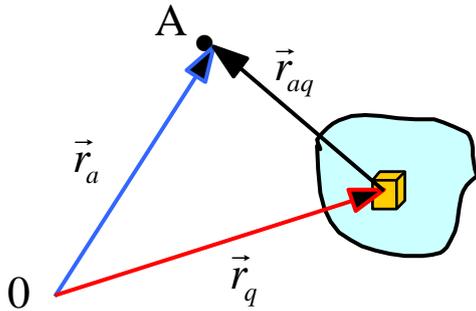


Рис. 7.1.

Для электрического поля можно было ввести скалярную потенциальную функцию $\varphi(x, y, z) = \varphi(\vec{r})$. Пусть (x_a, y_a, z_a) – координаты точки наблюдения (см вектор \vec{r}_a на рис. 7.1), а координаты (x_q, y_q, z_q) точек, где распределены заряды, определяются вектором \vec{r}_q . Тогда потенциал электрического поля записывается:

$$\varphi(x_a, y_a, z_a) = \int \frac{\rho(x_q, y_q, z_q)}{r_{aq}} dV_q, \quad (3.7.1)$$

где разность координат $\vec{r}_{aq} = \vec{r}_a - \vec{r}_q$.

Вообще для любой скалярной функции всегда можно взять ее градиент, и при этом ротор ее градиента тождественно равен нулю (условие потенциальности силового поля):

$$\text{rot}(\text{grad}\varphi) \equiv [\nabla, \nabla\varphi] \equiv 0 \quad (3.7.2)$$

Для электрического поля вводится также скалярная функция – потенциал (3.7.1), при этом \vec{E} определяется как градиент потенциала: $\vec{E} = -\nabla\varphi(x_a, y_a, z_a) = -\nabla_a\varphi$, так что автоматически выполняется $\text{rot}\vec{E} = 0$. Уравнение для потенциала – уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Решением этого уравнения и является потенциал (3.7.1).

Магнитное поле \vec{B} носит существенно другой характер, чем электрическое \vec{E} . В общем случае $\text{rot}\vec{B} \neq 0$ и \vec{B} не может быть градиентом скалярной функции. Уравнения магнитоэстатического поля (3.6.3) и (3.6.10) напомним, имеют вид:

$$\nabla\vec{B} = 0, \quad [\nabla, \vec{B}] = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.7.3)$$

Однако, в векторной алгебре известно другое тождество – дивергенция от ротора вектора тождественно равна нулю:

$$\text{div}(\text{rot}\vec{A}) \equiv (\nabla, [\nabla, \vec{A}]) \equiv 0 \quad (3.7.4)$$

Физический смысл этого векторного тождества состоит в том, что у соленоидального (вихревого) поля нет его источников – зарядов. Поэтому индукцию магнитного поля можно представить как ротор некоторой векторной функции \vec{A} :

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \quad (3.7.5)$$

где \vec{A} носит название *векторного потенциала*. При этом первое уравнение из (3.7.3) выполняется автоматически. Зачем вводить векторный потенциал, и каков его физический смысл, поясним несколько позже. Пока ограничимся только тем, что если векторный потенциал нам известен, то магнитное поле находится из соотношения (3.7.5).

Выбор векторного потенциала *неоднозначен*. Поле с заданной индукцией \vec{B} может быть описано многими векторными потенциалами. Пусть векторный потенциал \vec{A} описывает магнитное поле \vec{B} , тогда другой векторный потенциал

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\chi \quad (3.7.6)$$

при произвольной функции χ описывает то же самое поле \vec{B} . В самом деле, в силу (3.7.2) имеем:

$$\vec{B}' = \text{rot}\vec{A}' = \text{rot}\vec{A} + \text{rot}(\text{grad}\chi) = \text{rot}\vec{A} = \vec{B} \quad (3.7.7)$$

Преобразование векторного потенциала (3.7.6) называют *градиентным*, а эквивалентность векторов \vec{A} и \vec{A}' в смысле описания одного и того же магнитного поля – *градиентной инвариантностью*. Неоднозначность векторного потенциала аналогична неоднозначности скалярного потенциала в теории электростатического поля. Только потенциал Φ определяется с точностью до произвольной постоянной, а векторный потенциал \vec{A} – с точностью до произвольной функции определенного класса.

Благодаря градиентному преобразованию на векторный потенциал можно накладывать дополнительные условия, которые могут быть удовлетворены подбором скалярной функции χ .

3.7.2. Рассмотрим пример однородного магнитного поля.

Пусть магнитное поле направлено вдоль оси z : $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Тогда имеем следующие уравнения для компонент векторного потенциала, исходя из (3.7.5):

$$\begin{cases} B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B \end{cases} \quad (3.7.8)$$

В частности, имеем три решения (3.7.8) (как следствие неоднозначности определения векторного потенциала):

$$(1) A_y = Bx, \quad A_x = A_z = 0 \quad (3.7.9a)$$

$$(2) A_x = -By, \quad A_y = A_z = 0 \quad (3.7.9б)$$

$$(3) A_x = -\frac{1}{2}By, \quad A_y = \frac{1}{2}Bx, \quad A_z = 0, \quad \text{т.е. } \vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{B}, \vec{r}] \quad (3.7.9в)$$

Проверим третье решение, подействовав оператором ротора и учитывая, что $\vec{B} = \text{const}$:

$$\text{rot}\vec{A} \equiv -\left[\nabla, \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{B}]\right] = -\frac{1}{2}(\vec{B}, \nabla)\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{B}(\nabla, \vec{r}) = -\frac{1}{2}\vec{B} + \frac{3}{2}\vec{B} = \vec{B}.$$

Примечание 1. Напомним, что, выполняя операции с векторами, необходимо позаботиться, чтобы операторный множитель всегда находился впереди тех сомножителей, на которые он действует в исходном выражении. Это также относится к формуле “БАЦ-ЦАБ”.

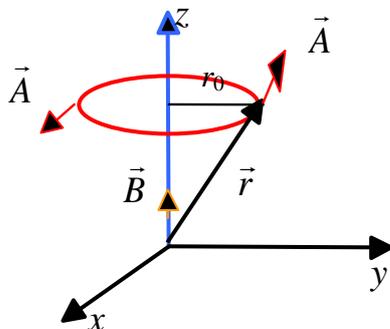


Рис. 7.2.

Поскольку вектор \vec{A} в виде (3.7.9в) перпендикулярен к плоскости, в которой лежат вектора \vec{B} и \vec{r} , и зависит только от модуля r , то отсюда получаем, что вектор \vec{A} “вращается” вокруг оси z : $A = \frac{1}{2}Br_0$, где r_0 – радиус окружности относительно оси z

(см рис. 7.2). Итак, силовые линии вектора \vec{A} – окружности вокруг направления индукции однородного магнитного поля.

Вычислим, чему равен интеграл $\oint \vec{A}d\vec{l}$ по окружности:

$$A \cdot 2\pi r_0 = \frac{1}{2}Br_0 2\pi r_0 = B \cdot \pi r_0^2.$$

Таким образом, получили поток вектора \vec{B} через круг радиуса r_0 и это не случайно, т.к. в общем случае это же следует из теоремы Стокса:

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (3.7.10)$$

В чем состоит удобство и смысл введения векторного потенциала? Проявляется ли он на опыте? К этим вопросам мы вернемся ниже, проясним его физический смысл, и затем снова рассмотрим векторный потенциал при описании электромагнитных волновых процессов.

3.7.3. Уравнение для векторного потенциала. Векторный потенциал токов.

Какому уравнению удовлетворяет векторный потенциал? Подставим (3.7.5) во второе уравнение (3.7.3), представляющее дифференциальную форму теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции (воспользовавшись правилом “БАЦ-ЦАБ” и свойствами операторного множителя):

$$[\nabla, \vec{B}] = [\nabla, [\nabla, \vec{A}]] = \nabla(\nabla, \vec{A}) - (\nabla, \nabla)\vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Воспользуемся неоднозначностью потенциала, наложив на потенциал определенное дополнительное условие – *калибровку*. В магнитостатике обычно выбирают следующую калибровку:

$$\text{div} \vec{A} \equiv (\nabla, \vec{A}) = 0 \quad (3.7.11)$$

Тогда уравнение для векторного потенциала магнитостатического поля имеет следующий вид:

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.7.12)$$

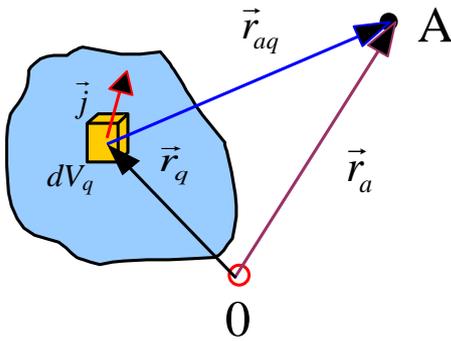


Рис. 7.3.

Поскольку это векторное уравнение, то на самом деле мы имеем три уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= -\frac{4\pi}{c} j_x \\ \Delta A_y &= -\frac{4\pi}{c} j_y \\ \Delta A_z &= -\frac{4\pi}{c} j_z \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

Каждое из этих трех уравнений аналогично уравнению Пуассона в электростатике (см уравнение (1.6.13)), решения которого мы уже знаем, например для x -ой компоненты:

$$A_x(\vec{r}_a) = \frac{1}{c} \int \frac{j_x(\vec{r}_q) dV_q}{r_{aq}}, \quad (3.7.14)$$

где $\vec{r}_a(x_a, y_a, z_a)$ координаты точки наблюдения, а $\vec{r}_q(x_q, y_q, z_q)$ – координаты точек, где распределены токи, $r_{aq} = |\vec{r}_a - \vec{r}_q|$ (см рис. 7.3). Отметим, что дифференцирование в (3.7.12) и (3.7.13) происходит по координате \vec{r}_a . В векторном виде решение системы (3.7.13) можно записать в виде уравнения, имеющего название: *векторный потенциал объемных токов*:

$$\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_q) dV_q}{r_{aq}} \quad (3.7.15)$$

Векторный потенциал линейных токов равен соответственно:

$$\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c} \int \frac{I(\vec{r}_q) d\vec{l}_q}{r_{aq}} \quad (3.7.16)$$

Проверим, что векторный потенциал токов (3.7.15) подчиняется условию калибровки (3.7.11). Подействуем оператором дивергенции на (3.7.15) и внесем оператор под интеграл:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c} \int \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j}(\vec{r}_q) \frac{1}{r_{aq}} \right) dV_q \quad (3.7.17)$$

Здесь оператор “градиента” осуществляет дифференцирование по точкам наблюдения \vec{r}_a :

$$\nabla_a = \text{grad}_a = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x_a} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y_a} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z_a}$$

От дифференцирования по координатам точки наблюдения $A - \vec{r}_a$ – перейдем к дифференцированию по координатам элементов тока \vec{r}_q под интегралом следующим образом:

$$\left\{ \vec{\nabla}_a \cdot \left(\vec{j}(\vec{r}_q) \frac{1}{r_{aq}} \right) = \vec{j}(\vec{r}_q) \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{aq}} \right) = -\vec{j}(\vec{r}_q) \vec{\nabla}_q \left(\frac{1}{r_{aq}} \right) = -\vec{\nabla}_q \left(\vec{j}(\vec{r}_q) \frac{1}{r_{aq}} \right) + \frac{1}{r_{aq}} (\vec{\nabla}_q \vec{j}(\vec{r}_q)) \right\} \quad (3.7.18)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{aq}} \right) = -\vec{\nabla}_q \left(\frac{1}{r_{aq}} \right)$$

Для стационарных токов имеем из теоремы неразрывности

$$\vec{\nabla}_q \vec{j}(\vec{r}_q) = \text{div} \vec{j} = 0,$$

Тогда продолжая (3.7.17) по теореме Гаусса-Остроградского, получаем равенство дивергенции векторного потенциала нулю:

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}_a) = -\frac{1}{c} \int_v \vec{\nabla}_q \left(\vec{j}(\vec{r}_q) \frac{1}{r_{aq}} \right) dV_q = -\frac{1}{c} \oint \vec{j}(\vec{r}_q) \frac{1}{r_{aq}} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \oint \frac{j_n dS}{r_{aq}} = 0, \quad (3.7.19)$$

т.к. на поверхности проводников нормальная составляющая вектора плотности тока $j_n = 0$. Таким образом, выполняется калибровка потенциала токов (3.7.15) и (3.7.16).

А что получим для индукции магнитного поля \vec{B} ? Подействуем оператором ротора на векторный потенциал (3.7.15):

$$\vec{B} = [\vec{\nabla}, \vec{A}] = \frac{1}{c} \int \left[\vec{\nabla}_a, \frac{\vec{j}(\vec{r}_q)}{r_{aq}} \right] dV_q = -\frac{1}{c} \int \left[\vec{j}(\vec{r}_q), \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{aq}} \right) \right] dV_q = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}_q), \vec{r}_{aq}]}{r_{aq}^3} dV_q \quad (3.7.20)$$

Получили закон Био-Савара в интегральной форме (см (3.5.6)), что и следовало ожидать.

3.7.4. О физическом смысле векторного потенциала.

Обычно в классической физике векторный потенциал \vec{A} рассматривается как вспомогательная величина, не имеющая физического смысла, т.е. не наблюдаемая и не измеряемая величина. Такая интерпретация восходит к работам О.Хевисайда и Г.Герца, рассматривавших электромагнитное поле довольно формально и интересовавшихся больше методами расчетов, чем физическими свойствами векторного потенциала. Однако Максвелл вводил векторный потенциал как величину, **пропорциональную импульсу** (количеству движения) **сгустка электромагнитного поля**, сопровождающего движущийся электрический заряд.

В середине этого века Я.Ааронов и Д.Бом предсказали интересный эффект, позже обнаруженный экспериментально. В области, где отсутствует магнитное поле $\vec{B} = 0$, но существует отличный от нуля векторный потенциал, изменение векторного потенциала меняет движение электронов, т.к. меняется импульс сгустка электромагнитного поля, сопровождающего электрон.

Такая ситуация складывается для длинного соленоида с током, у которого магнитное поле сосредоточено внутри цилиндра, а во внешней области магнитное поле равно нулю. На рис. 7.4 показан соленоид в разрезе, причем магнитное поле внутри соленоида направлено за плоскость рисунка. Индукция магнитного поля, определяемая соотношением $B = \partial A / \partial r$, терпит на границе соленоида (на радиусе r_0) конечный скачок (синяя кривая на рис. 7.4), а зависимость векторного потенциала от расстояния до центра $A(r)$ всего лишь меняет наклон (красная кривая на рис. 7.4). Таким образом, векторный потенциал отличен от нуля и вне соленоида, т.е. там, где индукция магнитного поля обращается в нуль. Отметим, приведенная на рисунке зависимость $B(r)$ (синяя кривая), где r_0 – радиус соленоида, является довольно грубой, т.к. не учитывает некоторых деталей на границе соленоида, но дает правильное качественное представление.

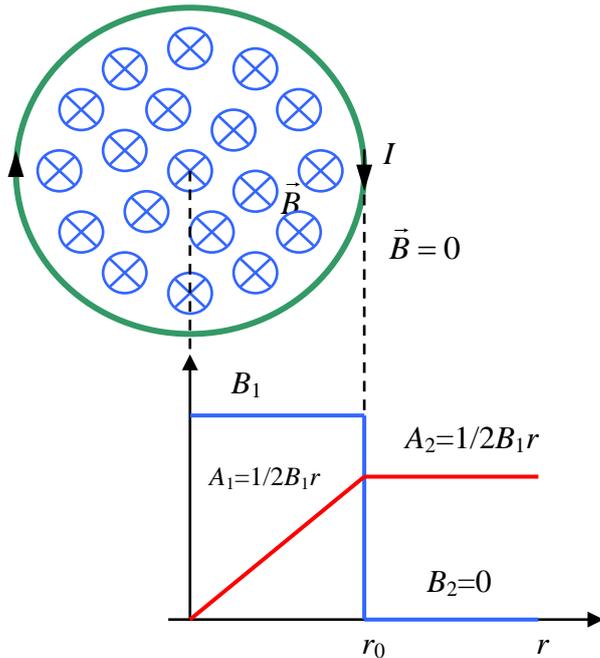


Рис. 7.4.

И. Ааронов и Д. Бом рассматривали рассеяние электронов на соленоиде, причем электроны, направленные перпендикулярно оси соленоида, могли огибать соленоид сверху или снизу (см рис. 7.5). Электронам присущи волновые свойства, и в отсутствие тока в катушке электронные волны, огибая соленоид (в этой части курса не будем вдаваться в детали), создают на экране некоторую интерференционную картину. При появлении в соленоиде тока оказывается, что интерференционная картина сдвигается, хотя электроны по-прежнему движутся во внешней области, где индукция магнитного поля \vec{B} равна нулю. Это означает, что *изменение векторного потенциала* в пространстве, окружающем соленоид, *меняет фазы электронных волн*, что в свою очередь приводит к изменению наблюдаемой на экране интерференционной картины. Следовательно, по изменению интерференционной картины можно определить изменение векторного потенциала. Таким образом, *изменение векторного потенциала магнитного поля оказывается наблюдаемой, измеряемой физической величиной*.

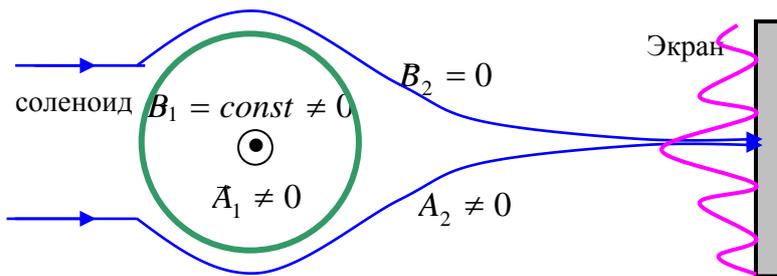


Рис. 7.5.

Необходимо отметить, что объяснение эффекта Ааронова – Боба возможно только при учете квантовых законов движения электронов в магнитном поле.

Кроме того, хотя в классической физике нет прямого способа измерения векторного потенциала \vec{A} , введение его очень удобно для теории поля. Так, с введением векторного потенциала упрощается

выражение для энергии взаимодействия системы зарядов и токов с электромагнитным полем, векторный потенциал определяет электрокинетический импульс заряженной частицы в электромагнитном поле, с его помощью упрощается запись системы уравнений Максвелла. Помимо всего прочего векторный потенциал \vec{A} вместе с скалярным потенциалом электростатического поля ϕ образуют 4-х вектор, компоненты которого преобразуются согласно преобразованиям Лоренца.

Однако отметим, что все выше было получено для статических полей, когда нет зависимости от времени. В дальнейшем мы рассмотрим зависимый от времени векторный потенциал и соответствующие электромагнитные поля.

Примечание 2. Оливер Хевисайд, английский физик, 1850-1925;

Генрих Рудольф Герц, немецкий физик, 1857-1894.

Дэвид Джозеф Бом, американский физик, 1917-1992;

Якир Ааронов, израильский физик, 1932)

3.7.5. Векторный потенциал и магнитное поле витка с током.

В этом пункте для примера используем векторный потенциал для вычисления магнитного поля витка или контура с током. Перепишем векторный потенциал линейных токов (3.7.16) в виде:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \oint \frac{Id\vec{l}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} \quad (3.7.21)$$

где $d\vec{l}_q$ – элемент контура с током I (см рис. 7.6), \vec{r} и \vec{r}_q – радиус-векторы до точки наблюдения и до элемента контура, соответственно.

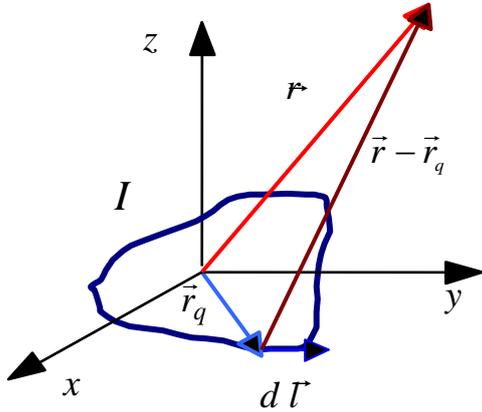


Рис. 7.6.

Примечание 3. В системе СИ этот потенциал записывается

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|}$$

Пусть $r_q \ll r$, т.е. рассмотрим малый контур на больших расстояниях, тогда можно использовать следующее разложение:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_q^2 - 2(\vec{r}, \vec{r}_q)}} \approx \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}, \vec{r}_q)}{r^3} \quad (3.7.22)$$

Ограничиваясь первыми членами разложения, подставим в векторный потенциал (3.7.21):

$$\vec{A} = \frac{I}{c} \oint \frac{d\vec{l}_q}{r} + \frac{I}{c} \oint \frac{(\vec{r}_q, \vec{r})}{r^3} d\vec{l}_q \quad (3.7.23)$$

Первое слагаемое в (3.7.23) равно нулю:

$$\frac{I}{cr} \oint d\vec{l}_q = 0,$$

в силу векторного обхода замкнутого контура. Разберемся со вторым слагаемым в (3.7.23):

$$\vec{A} = \frac{I}{cr^3} \oint (\vec{r}_q, \vec{r}) d\vec{l}_q. \quad (3.7.24)$$

Для вычисления интеграла по контуру (3.7.24) воспользуемся определением вектора площади

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint [\vec{r}_q, d\vec{l}_q] \quad (3.7.25)$$

(см рис. 7.7), а также известным векторным тождеством для произвольного постоянного вектора \vec{b} :

$$\oint d\vec{l}_q (\vec{r}_q, \vec{b}) = - \left[\vec{b}, \frac{1}{2} \oint [\vec{r}_q, d\vec{l}_q] \right] = \left[\oint d\vec{S}, \vec{b} \right] = [\vec{S}, \vec{b}], \quad (3.7.26)$$

где интегрирование проводится по замкнутому контуру с площадью S (рис. 7.7). Доказательство (3.7.26) приведено в Приложении 1.

Видно, что в качестве произвольного вектора \vec{b} можно рассмотреть вектор, входящий в (3.7.24):

$$\vec{b} = \frac{I\vec{r}}{cr^3}$$

Тогда интеграл (3.7.24) можно записать в виде:

$$\vec{A} = \frac{I}{cr^3} \oint (\vec{r}_q, \vec{r}) d\vec{l}_q = \frac{I}{cr^3} [\vec{S}, \vec{r}] \quad (3.7.27)$$

Итак, в общем случае векторный потенциал малого витка с током равен:

$$\vec{A} = \frac{I}{cr^3} [\vec{S}, \vec{r}] = \frac{[\vec{M}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.7.28)$$

Здесь мы ввели **магнитный момент** \vec{M} витка с током:

$$\vec{M} = \frac{I}{c} \vec{S} \quad (3.7.29)$$

Магнитный момент определяет векторный потенциал магнитного поля и играет в магнетизме ту же роль, что и дипольный момент диполя в электростатике (сравни с формулами (1.7.1) и (1.7.4)).

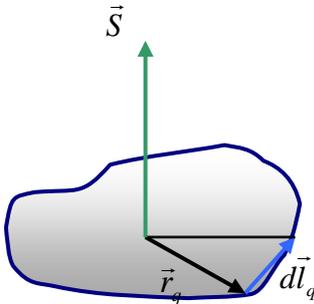


Рис. 7.7.

Примечание 4. В системе $СИ$ имеем

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{M}, \vec{r}]}{r^3}, \quad \vec{M} = I\vec{S}$$

Теперь используя полученное выражение для векторного потенциала витка с током (3.7.28) и определение $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, считаем *магнитное поле витка с током*, пользуясь правилом БАЦ-ЦАБ:

$$\vec{B} = [\nabla, \vec{A}] = \left[\nabla, \frac{[\vec{M}, \vec{r}]}{r^3} \right] = \vec{M} \left(\nabla, \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{M}, \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3.7.30)$$

Первое слагаемое равно нулю, т.к. $\left(\nabla, \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \equiv \text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$ и, далее, для второго слагаемого имеем:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{1}{r^3} (\vec{M}, \nabla) \vec{r} - \vec{r} \left(\vec{M}, \nabla \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{\vec{M}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{M}, \vec{r})}{r^5} \vec{r} \\ \vec{B} &= \frac{3(\vec{M}, \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{M}}{r^3} \end{aligned} \quad (3.7.31)$$

Итак, выражение для магнитного поля, созданного витком с током, в точности совпадает с выражением для электрического поля электрического диполя (1.7.9) при замене дипольного момента диполя на магнитный момент витка с током.

Приложение 1. Докажем следующую формулу:

$$\oint_L (\vec{\rho}, \vec{b}) d\vec{l} = \left[\int_S d\vec{S}, \vec{b} \right] = [\vec{S}, \vec{b}],$$

где \vec{b} – некоторый вектор в пространстве, $\vec{\rho} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ – вектор, определяющий координаты элемента $d\vec{l}$ контура L , а интегрирование ведется по контуру и поверхности опирающейся на контур. Умножим равенство скалярно на произвольный, но постоянный вектор \vec{a} , который можно ввести под знак интеграла:

$$\left(\vec{a}, \oint_L (\vec{\rho}, \vec{b}) d\vec{l} \right) = \oint_L (\vec{\rho}, \vec{b}) \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot}((\vec{\rho}, \vec{b}) \vec{a}) d\vec{S} = \int_S \{ (\vec{\rho}, \vec{b}) \text{rot} \vec{a} + [\nabla(\vec{\rho}, \vec{b}), \vec{a}] \} d\vec{S} =$$

Здесь мы воспользовались теоремой для циркуляции вектора $(\vec{\rho}, \vec{b}) \vec{a}$, по которой циркуляция вектора $(\vec{\rho}, \vec{b}) \vec{a}$ по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через поверхность, опирающуюся на этот контур, и следующим векторным соотношением

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot} \vec{a} + [\nabla \varphi, \vec{a}]$$

Далее, поскольку вектор $\vec{a} = \text{const}$, то $\text{rot} \vec{a} = 0$ и получаем, продолжая равенство:

$$= \int_S [\nabla(\vec{\rho}, \vec{b}), \vec{a}] d\vec{S} = \int_S [\vec{b}, \vec{a}] d\vec{S} = -[\vec{a}, \vec{b}] \int_S d\vec{S} = -\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \int_S d\vec{S} \right] \right) = \left(\vec{a}, \left[\int_S d\vec{S}, \vec{b} \right] \right)$$

Здесь учли, что $\nabla(\vec{\rho}, \vec{b}) = \vec{b}$, и воспользовались циклической перестановкой в смешанном (скалярном и векторном) произведении векторов. Из последнего соотношения в силу произвольности постоянного вектора $\vec{a} = \text{const}$, получаем выше указанное равенство.

Приложение 2. Можно формулу (3.7.26) получить непосредственно из прямых вычислений.

Пусть для простоты имеем плоский контур, причем начало координат лежит внутри контура, а оси (x, y) в плоскости контура, т.е.

$$\vec{r}_q = x_q \vec{e}_x + y_q \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z \quad \text{и} \quad d\vec{l}_q = dx_q \vec{e}_x + dy_q \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z.$$

Тогда записываем:

$$\oint (\vec{r}_q, \vec{r}) d\vec{l}_q = \oint (x_q x + y_q y) d\vec{l}_q = \oint (x_q x + y_q y) (dx_q \vec{e}_x + dy_q \vec{e}_y)$$

Считаем слагаемые отдельно - y - ую компоненту и x - ую компоненту:

$$\oint (x_q x + y_q y) dy_q = x \oint x_q dy_q + y \frac{y_q^2}{2} \Big|_{-a}^a = x S_z + 0 = x S_z$$

$$\oint (x_q x + y_q y) dx_q = x \frac{x_q^2}{2} \Big|_{-a}^a + y \oint y_q dx_q = 0 - y S_z = -y S_z$$

Здесь мы ввели величину a , характеризующую пределы изменения переменных x (y) контура, и определили проекцию вектора малой площадки контура на ось z как интеграл $S_z = \oint x_q dy_q = -\oint y_q dx_q$. Во втором интеграле получаем отрицательное значение, т.к. $dx_q < 0$ там, где $y_q > 0$. Итак, получаем для компонент векторного потенциала:

$$A_x = -\frac{IyS_z}{cr^3}, \quad A_y = \frac{IxS_z}{cr^3}$$

Видно, что это есть компоненты векторного произведения радиус-вектора на вектор площадки контура.
