3.8. Контур с током в магнитном поле.

3.8.1. Контур с током в однородном магнитном поле.

Рассмотрим силу, действующую на виток с током I в постоянном (однородном) магнитном поле $\vec{B} = const$ (см рис. 8.1). Исходя из формулы Ампера, имеем силу, действующую на элемент с током:

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}\left[d\vec{l}, \vec{B}\right].$$

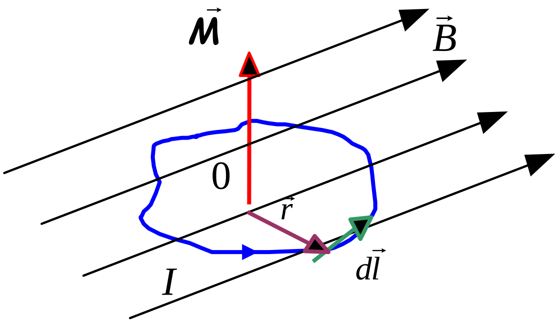

Рис. 8.1.

Интегрируя по всему контуру витка, получаем, что полная сила, действующая на виток с током, равна нулю

$$\vec{F} = \frac{I}{c}\oint\left[d\vec{l}, \vec{B}\right] = \frac{I}{c}\left[\oint d\vec{l}, \vec{B}\right] = 0, \tag{3.8.1}$$

т.к. для замкнутого провода $\oint d\vec{l} = 0$.

Однако момент сил, действующих на контур с током в магнитном поле, отличен от нуля $\vec{M} \neq 0$. Так, например, стрелка компаса в магнитном поле Земли под действием момента сил поворачивается вдоль направления магнитного поля. Момент сил, действующих на элемент контура с током $d\vec{l}$ в магнитном поле $\vec{B}$ относительно точки 0, определяется выражением (см рис. 8.1):

$$d\vec{M} = \left[\vec{r}, d\vec{F}\right] = \frac{I}{c}\left[\vec{r}\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]\right], \tag{3.8.2}$$

где вектор $\vec{r}$ определяет положение элемента контура $d\vec{l}$ относительно точки 0. Тогда полный момент сил Ампера, действующих на виток с током равен:

$$\vec{M} = \oint d\vec{M} = \frac{I}{c}\oint\left[\vec{r}\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]\right] = \frac{I}{c}\oint\left(d\vec{l}\left(\vec{r}, \vec{B}\right) - \vec{B}\left(\vec{r}, d\vec{l}\right)\right) = \frac{I}{c}\oint d\vec{l}\left(\vec{r}, \vec{B}\right) - \frac{I}{c}\oint \vec{B}\left(\vec{r}, d\vec{l}\right). \tag{3.8.3}$$

Первый интеграл в (3.8.3) мы уже считали (см формулы (3.7.27), (3.7.29) и (3.7.30)), когда получали выражение для векторного потенциала, с той лишь разницей, что вместо вектора $\vec{B}$ стоял вектор $\vec{r}/r^3$:

$$\frac{I}{c}\oint d\vec{l}\left(\vec{r}, \vec{B}\right) = \frac{I}{c}\left[\vec{S}, \vec{B}\right] = \vec{\mathcal{M}} \times \vec{B} \equiv \left[\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}\right] \tag{3.8.4}$$

Здесь $\vec{\mathcal{M}}$ магнитный момент контура. Второй интеграл в (3.8.3), учитывая, что $\vec{B} = const$, равен:

$$-\frac{I}{c}\oint \vec{B}\left(\vec{r}, d\vec{l}\right) = -\frac{I}{c}\vec{B}\oint\left(\vec{r}, d\vec{l}\right) = -\frac{I}{c}\vec{B}\oint \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}r^2\right)d\vec{l} = 0, \tag{3.8.5}$$

т.к. интеграл по замкнутому контуру от операции $grad$ равен нулю. В самом деле, при переходе по теореме Стокса к потоку ротора вектора, мы получаем под интегралом $rot(grad)$, который тождественно равен нулю: $rot\,grad \equiv 0$.

Таким образом, *механический момент сил* определяется следующим выражением:

$$\vec{M} = \left[\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}\right] \tag{3.8.6}$$

Магнитное поле стремится развернуть магнитный момент $\vec{\mathcal{M}}$ контура с током вдоль поля (вектора $\vec{B}$, см рис. 8.2). Такое положение контура устойчиво, т.к. при $\vec{\mathcal{M}} \parallel \vec{B}$ получаем $\vec{M} = 0$, также, как и $\vec{F}$.

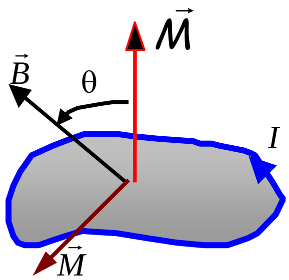

Рис. 8.2.

Из механики известно, что если результирующая сила всех сил, действующих на систему, равна нулю, то суммарный момент этих сил не зависит от точки, относительно которой определяют моменты этих сил. Поэтому в нашем случае можно просто говорить о моменте “амперовых” сил, действующих на виток с током.

Получим *потенциальную энергию контура с током в магнитном поле*. Тот факт, что поле стремится ориентировать контур относительно направления вектора $\vec{B}$, означает, что потенциальная энергия контура с током будет зависеть от его ориентации в поле. Работа момента сил при малом повороте на угол $d\theta$ (рис. 8.2) равна:

$$dW = Md\theta = \mathcal{M}\cdot B\sin\theta d\theta;$$

Тогда запас энергии при произвольном угле между векторами индукции магнитного поля и магнитного момента равен:

$$W = -\mathcal{M}\cdot B\cos\theta + const = -\mathcal{M}\cdot B\cos\theta .$$

Постоянную можно положить равной нулю. Окончательно получаем выражение для потенциальной энергии в виде:

$$W = -\vec{\mathcal{M}}\vec{B}. \tag{3.8.7}$$

Напомним, что аналогичное выражение мы получали для энергии диполя в электрическом поле.

3.8.2. Контур с током в неоднородном магнитном поле.

Рассмотрим неоднородное магнитное поле и контур с током, который будем считать достаточно маленьким по сравнению с областью существенного изменения магнитного поля (рис.8.3). Найдем, как меняется магнитное поле вблизи контура: $\vec{B}(\vec{\rho})$, где $\vec{\rho}$ – координаты контура, отсчитанные от его условного центра. Для этого представим компоненты неоднородного поля вблизи границы витка как сумму однородного магнитного поля на границе и изменения поля в её окрестностях:

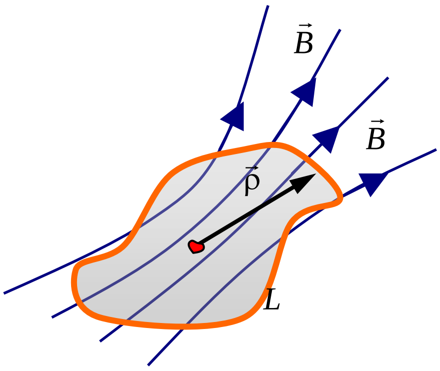

Рис. 8.3.

$$B_x(\vec{\rho}) = B_{0x} + \vec{\rho}\vec{\nabla}B_x = B_{0x} + \rho_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + \rho_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + \rho_z\frac{\partial B_x}{\partial z};$$

$$B_y(\vec{\rho}) = B_{y_0} + \vec{\rho}\vec{\nabla}B_y; \tag{3.8.8}$$

$$B_z(\vec{\rho}) = B_{z_0} + \vec{\rho}\vec{\nabla}B_z.$$

Таким образом, получаем для всего вектора

$$\vec{B}(\vec{\rho}) = \vec{B}_0 + (\vec{\rho},\vec{\nabla})\vec{B}. \tag{3.8.9}$$

Запишем силу, действующую в магнитном поле на элемент $d\vec{l}$ витка с током:

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}\left[d\vec{l},\vec{B}\right] = \frac{I}{c}\left[d\vec{l},\vec{B}_0\right] + \frac{I}{c}\left[d\vec{l},(\vec{\rho},\vec{\nabla})\vec{B}\right]. \tag{3.8.10}$$

Первое слагаемое при интегрировании обращается в нуль, так как $\vec{B}_0 = const$ определяет индукцию однородного поля. Второе слагаемое в (3.8.10) перепишем подробнее:

$$\vec{F} = \frac{I}{c}\oint d\vec{l}\times(\vec{\rho},\vec{\nabla})\vec{B} = \frac{I}{c}\oint d\vec{l}\times\left[(\vec{\rho},\vec{\nabla}B_x)\vec{e}_x + (\vec{\rho},\vec{\nabla}B_y)\vec{e}_y + (\vec{\rho},\vec{\nabla}B_z)\vec{e}_z\right] =$$

$$= \frac{I}{c}\left(\oint d\vec{l}\,(\vec{\rho},\vec{\nabla}B_x)\right)\times\vec{e}_x + \frac{I}{c}\left(\oint d\vec{l}\,(\vec{\rho},\vec{\nabla}B_y)\right)\times\vec{e}_y + \frac{I}{c}\left(\oint d\vec{l}\,(\vec{\rho},\vec{\nabla}B_z)\right)\times\vec{e}_z =$$

Опять же, эти интегралы $\frac{I}{c}\oint d\vec{l}\,(\vec{\rho},\vec{\nabla}B_i) = \frac{I}{c}\left[\vec{S},\vec{\nabla}B_i\right] = \left[\vec{\mathcal{M}},\vec{\nabla}B_i\right]$, которые мы фактически сосчитали ранее (см (3.7.22) и (3.7.30)). Подставим их значения и далее, используя свойства перестановки в векторных произведениях и правило “БАЦ-ЦАБ”, имеем:

$$= \left[\left[\vec{\mathcal{M}},\vec{\nabla}B_x\right]\vec{e}_x\right] + \left[\left[\vec{\mathcal{M}},\vec{\nabla}B_y\right]\vec{e}_y\right] + \left[\left[\vec{\mathcal{M}},\vec{\nabla}B_z\right]\vec{e}_z\right] = -\left[\vec{e}_x\left[\vec{\mathcal{M}},\vec{\nabla}B_x\right]\right] + \ldots =$$

$$= (\vec{\mathcal{M}},\vec{e}_x)\vec{\nabla}B_x - (\vec{\nabla}B_x,\vec{e}_x)\vec{\mathcal{M}} + (\vec{\mathcal{M}},\vec{e}_y)\vec{\nabla}B_y - \ldots =$$

$$= \left(\mathcal{M}_x\vec{\nabla}B_x + \mathcal{M}_y\vec{\nabla}B_y + \mathcal{M}_z\vec{\nabla}B_z\right) - \vec{\mathcal{M}}\,div\vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\mathcal{M}},\vec{B}), \tag{3.8.11}$$

Здесь мы воспользовались также тем, что $div\vec{B} = 0$.

С другой стороны мы знаем, что $W = -\vec{\mathcal{M}}\vec{B}$, тогда для силы получаем

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W = \vec{\nabla}(\vec{\mathcal{M}},\vec{B}) \tag{3.8.12}$$

Полученную формулу можно переписать несколько иначе используя формулу “ВАС – САВ” двойного векторного произведения:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{M},\vec{B}\right)=\left[\vec{M},\left[\vec{\nabla},\vec{B}\right]\right]+\left(\vec{M},\vec{\nabla}\right)\vec{B}. \qquad (3.8.13)$$

($\vec{\nabla}\times\vec{B}=\left[\vec{\nabla},\vec{B}\right]\equiv rot\vec{B}$). В тех областях, где отсутствует токи, $rot\vec{B}=0$, и $\vec{\nabla}\left(\vec{M},\vec{B}\right)=\left(\vec{M},\vec{\nabla}\right)\vec{B}$, поэтому верны обе формулы:

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\left(\vec{M},\vec{B}\right) \quad \text{и} \quad \vec{F}=\left(\vec{M},\vec{\nabla}\right)\vec{B} \qquad (3.8.14)$$

($\vec{M}$ не зависит от координат точки $\vec{r}$, поэтому его можно “пронести” через оператор $\vec{\nabla}$ влево).

Формулы (3.8.14) можно написать сразу, если показать, что $W=-\vec{M}\vec{B}$ есть потенциальная энергия витка с током в данной точке поля, связанная не только с его ориентацией, но и местоположением. Поясним, почему это выражение вообще можно считать всей механической энергией витка в магнитном поле, хотя мы ее получили исходя только из поворота магнитного момента в магнитном поле. Предположим, что имеем магнитное поле и магнитный момент. По определению потенциальная энергия равна работе сторонних сил по перемещению тела из бесконечности (где поле равно 0) в заданную точку пространства. Предположим, что мы вносим магнитный момент $\vec{M}$ в поле так, что направление магнитного момента перпендикулярно направлению магнитного поля во всех точках траектории. В этом случае сила, действующая на магнитный момент $\vec{M}$, может быть легко найдена (считаем, что это ось x направлена перпендикулярно к индукции магнитного поля $\vec{B}$):

$$\vec{F}=\left(\vec{M},\vec{\nabla}\right)\vec{B}=M\frac{\partial}{\partial x}\vec{B}=M\frac{\partial}{\partial x}\left(B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+B_z\vec{e}_z\right)=M\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\vec{e}_y+\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e}_z\right)$$

Таким образом, сила перпендикулярна к оси x, т.е. к перемещению и работа по перемещению равна 0. Поэтому работа затрачена только на поворот $\vec{M}$ в поле, для которого мы имеем энергию $W=-\vec{M}\vec{B}$.

3.8.3. <u>Сравнение формул электростатики и магнитостатики. Аналогия и различие</u>.

Рассмотрим и сравним основные соотношения для электростатики и магнитостатики.

Электростатика Система единиц Гаусса (СИ)	*Магнитостатика* Система единиц Гаусса (СИ)
Напряженность электрического поля $\vec{E}=\int\limits_V\frac{\rho\vec{r}}{r^3}dV \quad \left(\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V\frac{\rho\vec{r}}{r^3}dV\right)$	Индукция магнитного поля $\vec{B}=\frac{1}{c}\int\limits_V\frac{\left[\vec{j},\vec{r}\right]}{r^3}dV \quad \left(\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\left[\vec{j},\vec{r}\right]}{r^3}dV\right)$
Скалярный потенциал электрического поля $\varphi=\int\limits_V\frac{\rho dV}{r} \quad \left(\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V\frac{\rho dV}{r}\right)$ $\vec{E}=-grad\varphi=-\nabla\varphi$	Векторный потенциал магнитостатического поля $\vec{A}=\frac{1}{c}\int\limits_V\frac{\vec{j}}{r}dV \quad \left(\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{j}}{r}dV\right)$ $\vec{B}=rot\vec{A}=\left[\nabla,\vec{A}\right]$
Уравнение Пуассона для потенциала $\Delta\varphi=-4\pi\rho \quad \left(\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$	Уравнение для векторного потенциала $\Delta\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \left(\Delta\vec{A}=-\mu_0\vec{j}\right)$
Электрический диполь $\vec{p}=q\vec{l}$	Магнитный диполь $\vec{M}=\frac{I}{c}\vec{S} \quad \left(\vec{M}=I\vec{S}\right)$
Поле электрического диполя $\vec{E}=\frac{3\left(\vec{p},\vec{r}\right)}{r^5}\vec{r}-\frac{\vec{p}}{r^3}$	Поле магнитного диполя $\vec{B}=\frac{3\left(\vec{M},\vec{r}\right)}{r^5}\vec{r}-\frac{\vec{M}}{r^3}$
Момент сил $\quad \vec{M}=\left[\vec{p},\vec{E}\right]$	Момент сил $\quad \vec{M}=\left[\vec{M},\vec{B}\right]$

Энергия электрического диполя

$$W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$$

Сила, действующая на электрический диполь

$$\vec{F} = \left(\vec{p}, \nabla\right)\vec{E}$$

$$p = q\,l$$

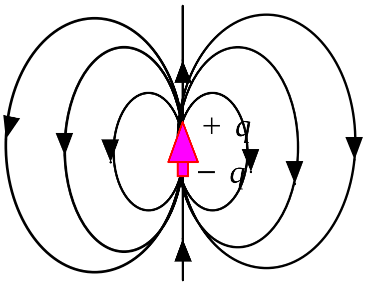

Рис. 8.4.

Энергия магнитного диполя

$$W = -\left(\vec{M}, \vec{B}\right)$$

Сила, действующая на магнитный диполь

$$\vec{F} = \left(\vec{M}, \nabla\right)\vec{B}$$

$$M = \frac{IS}{c}n$$

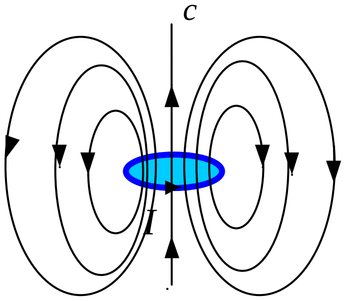

Рис. 8.5.

Отличие связано с тем, что магнитное поле соленоидальное, т.е. не имеет источников ($div\vec{B} = 0$). Электрическое поле - потенциальное ($rot\vec{E} = 0$). Однако, эта разница относится только к области пространства, в которой расположена система создающая поле. Если посмотреть на силовые линии полей, создаваемые диполями, видна полная аналогия. И если исключить из рассмотрения малую область, заключающую дипольные моменты, то картинки абсолютно одинаковые. Есть ли различие? Да, во внешнем поле $\vec{M}$ и $\vec{p}$ ориентируются вдоль поля, но ориентировка магнитных моментов усиливает поле, а электрических – ослабевает.