

3.15. Электропроводность в магнитном поле.

3.15.1. Классический эффект Холла (1879 г.).

Когда металлическая пластинка, вдоль которой течет постоянный ток, помещена в магнитное поле, направленное перпендикулярно к пластинке, то на боковых гранях, параллельных приложенному полю и току, возникает разность потенциалов

$$U_H = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Это *классический эффект Холла*. Рассмотрим этот эффект (см рис. 15.1).

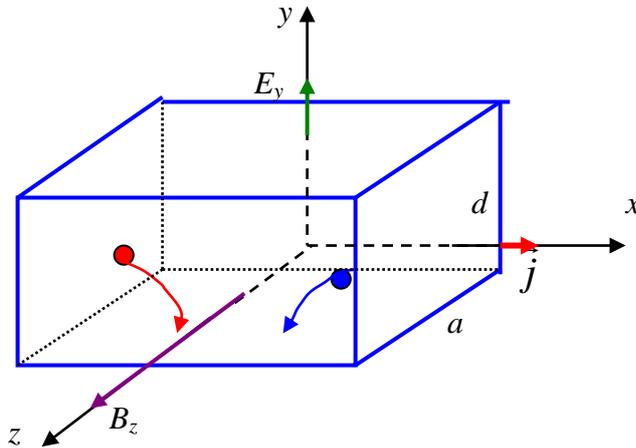


Рис. 15.1.

Выберем такую систему координат, что компоненты скорости (или вектора плотности тока) и индукции магнитного поля определяются: $\vec{v}(v_x, 0, 0)$ и $\vec{B}(0, 0, B_z)$, т.е. имеем

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x \vec{e}_x \\ \vec{B} &= B_z \vec{e}_z \end{aligned} \quad (3.15.1)$$

Сила Лоренца, равная: $\vec{F} = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{B}]$, смещает

заряды к грани перпендикулярной к оси y (рис. 15.1). Ее действие эквивалентно действию эффективного электрического поля \vec{E} :

$$q\vec{E} = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{B}] \quad (3.15.2)$$

Поэтому заряды будут смещаться, пока они не накопятся на гранях, перпендикулярных оси y , в количестве достаточном для того, чтобы создать такое же электрическое поле, препятствующее смещению зарядов:

$$\vec{E}(0, E_y, 0) \quad (3.15.3)$$

Отметим при этом, что положительные и отрицательные заряды смещаются в одну сторону. На рис. 15.2 показано направление тока (на рисунке слева направо) и соответствующее направление движения положительного и отрицательного зарядов (индукция магнитного поля направлена перпендикулярно плоскости рисунка и направлена на нас):

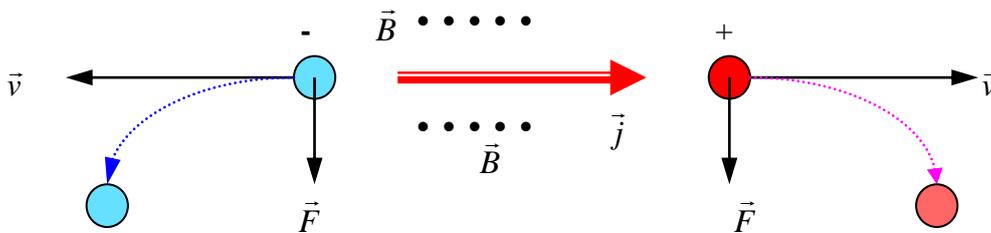


Рис. 15.2.

Итак, возникает электрическое поле, направленное по оси y и по величине равное:

$$E_y = \pm \frac{1}{c} v_x B_z \quad (3.15.4)$$

Знак «+» в (3.15.4) относится к положительным носителям тока, знак «-» – к отрицательным. Скорость движения зарядов находим из плотности тока $j_x = qn v_x$:

$$v_x = \frac{j_x}{qn} \quad (3.15.5)$$

Таким образом, электрическое поле Холла равно:

$$E_y = \frac{j_x B_z}{cnq} \quad (3.15.6)$$

Коэффициент или *постоянная Холла* определяются:

$$R = \frac{E_y}{B_z j_x} = \frac{1}{cnq} \quad (3.15.7)$$

Разность потенциалов на обкладках по оси y (в силу того, что электрическое поле однородное) называется *Холловской разностью потенциалов*:

$$U_H = E_y d = R j_x B_z d = \frac{j_x B_z d}{cnq} \quad (3.15.8)$$

В этом и заключается эффект Холла. Эксперимент Холла позволяет определить знак носителей заряда. Смена знака носителей заряда ведет к смене направления E_y и, соответственно, к смене знака зарядов на стенках образца. На практике постоянную Холла получают из следующего соотношения:

$$R = \frac{E_y \cdot ad}{B j \cdot ad} = \frac{U_H \cdot a}{B \cdot I} \quad (3.15.9)$$

где a - ширина образца. Итак, измеряя постоянную Холла, можно найти знак и концентрацию носителей заряда. Было подтверждено, что в металлах носителями являются электроны. В полупроводниках бывает, что проводимость обеспечивается положительными носителями – *дырками*.

Вводят понятие *подвижности* (см ранее § 3.2 (3.2.9)):

$$\mu = \frac{v}{E} \quad (3.15.10)$$

где v скорость носителей, а E – электрическое поле вдоль направления тока (в отличие от E_y). Тогда можно записать соотношение, связывающее постоянную Холла, проводимость и подвижность:

$$\frac{j}{E} = \sigma = nq \frac{v}{E} = nq\mu \quad (3.15.11)$$

$$R\sigma = \frac{\mu}{c}$$

Эффект Холла широко используется в опытах для определения знака заряда носителей тока.

Примечание 1. Эдвин Герберт Холл, американский физик, 1855–1938.

3.15.2. Двумерный ток. МДП структуры.

Устремим толщину образца к нулю $a \rightarrow 0$, получая при этом плоскую двумерную структуру, – по такой тонкой пластинке течет двумерный ток. Введем при этом линейную плотность тока \vec{i} ($I = id$) как ток, текущий через единицу длины (см) тонкой пластинки. При этом Холловская разность потенциалов, следуя (3.15.8), равна:

$$U_H = -\frac{di}{nqc} B = -\frac{IB}{nqc} \quad (3.15.12)$$

Концентрация носителей в плоскости пластинки определяется:

$$n = \frac{dN}{dS} = \frac{dN}{dxdy} \quad (3.15.13)$$

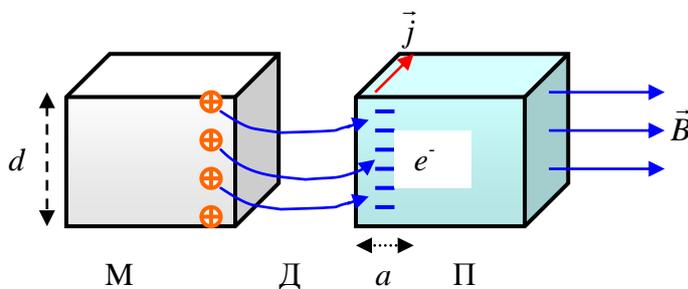


Рис. 15.3.

Случай двумерного тока реализован в 70-е годы. На рис. 15.3 изображена структура, где последовательно помещены (слева направо) М – металл и П – полупроводник, а между ними слой Д – диэлектрика. Это так называемые *МДП структуры*. Ток течет в плоскости x, y вдоль границы полупроводника (рис. 15.3, см также рис. 15.4). (Подробнее о МДП структурах см в статье Бедного Б.И. "Электронные ловушки на поверхности полупроводников." Соросовский

Диэлектрик обычно представляет собой очень тонкую пленку окисла на поверхности полупроводника. Электроны, перескочившие через диэлектрическую пленку в полупроводник посредством диффузии, задерживаются на поверхности полупроводника полем, возникающим в металле положительным зарядом. Толщина слоя $a \sim 10$ Ангстрем. Прикладываем внешнее электрическое поле параллельно границе раздела,

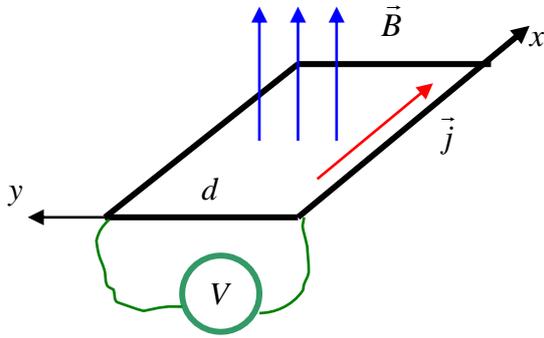


Рис. 15.4.

так что ток идет вдоль границы, и прикладываем внешнее магнитное поле перпендикулярно поверхности (рис. 15.4). Таким образом получаем эффект Холла практически на плоской поверхности. Холловская разность потенциалов равна ($I = id$, $q = e$):

$$U_H = U_y = \frac{I_x B}{nec} \quad (3.15.14)$$

Откуда Холловское сопротивление равно:

$$r_H = \rho_{xy} = \frac{U_y}{I_x} = \frac{B}{nec} \quad (3.15.15)$$

Заметим, что это не совсем обычное сопротивление, т.к. обычное $R = \rho_{xx} = U_x / I_x$, а здесь отношение

Холловской разности потенциалов к току вдоль оси x . Холловское сопротивление (двумерный случай) не зависит от размеров образца:

$$r_H = \frac{U_y}{I_x} = \frac{E_y d}{i_x d} = \frac{E_y}{i_x} = \rho_{xy}, \quad (3.15.16)$$

т.е. полное сопротивление равно удельному сопротивлению (напомним дифференциальный закон Ома $\vec{E} = \rho \vec{j}$). Можно также показать для двумерного случая, что обычное сопротивление также не зависит от размеров образца (в трехмерном случае не так).

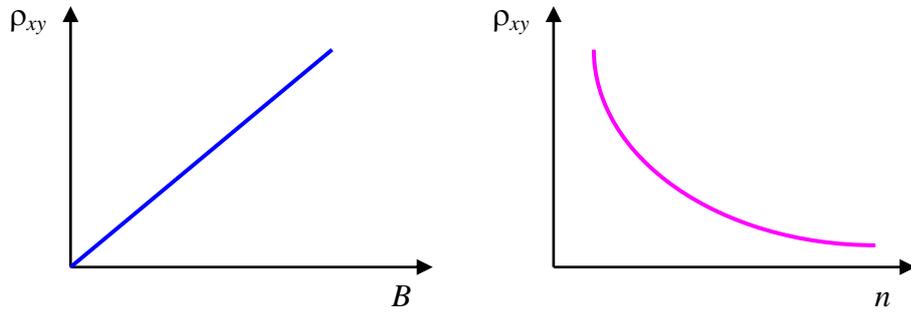


Рис. 15.5.

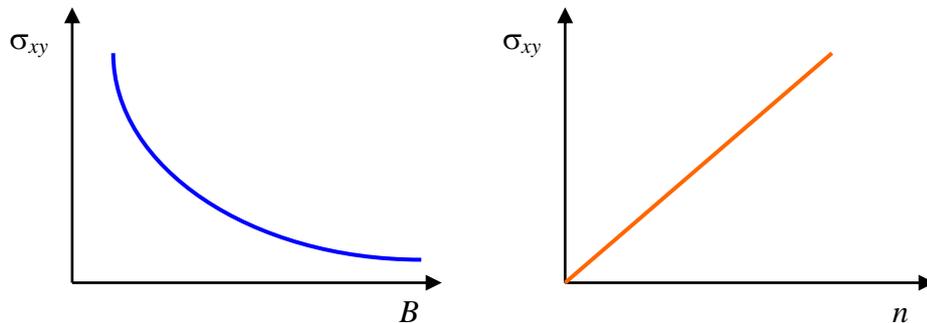


Рис. 15.6.

Проводимость Холла: (на самом деле в теории она вводится чуть сложнее) в нашем случае равна:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{I_x}{U_y} = \frac{nec}{B} \quad (3.15.17)$$

Классические зависимости Холловского сопротивления и проводимости (3.15.17) от величины магнитной индукции B и концентрации носителей n представлены на рисунках 15.5 и 15.6.

3.15.3. Квантовый эффект Холла.

Измерение проводимости двумерного тока при низких температурах ($T \sim 5^{\circ}K$) показало, что Холловская проводимость σ_{xy} меняется ступенчато с ростом магнитного поля B и концентрации n носителей, в данном случае электронов (см рис. 15.7). Скачок проводимости определяется фундаментальными константами – *квант проводимости*:

$$\sigma_0 = \frac{e^2}{2\pi\hbar} = \frac{e^2}{h}. \quad (3.15.18)$$

Эксперимент показал следующую ступенчатую зависимость:

$$\sigma_{xy} = N \frac{e^2}{h}, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15.19)$$

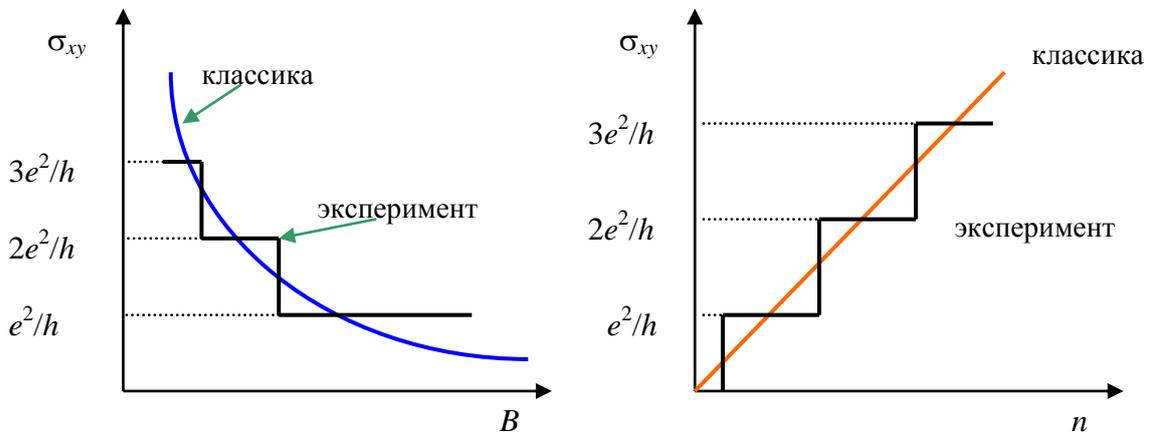


Рис. 15.7.

Точность определения ступенек и их соответствие кратным значениям e^2/h на эксперименте порядка 7-9 значащих цифр. Чем ниже температура, тем ярче выражены ступеньки. Итак, эксперимент показал, что сопротивление от “ступеньки” равно:

$$r_{step} = \frac{h}{e^2} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} = 25812.80 \text{ Ом} \quad (3.15.20)$$

Из (3.15.20) следует **важный вывод**: от материала образца ничего не зависит. Есть только фундаментальные константы и сопротивление зависит только от них. То есть мы получаем “*эталон сопротивления*” – международный стандарт сопротивления – r_{step} .

Фон Клитцинг за открытие квантового эффекта Холла получил Нобелевскую премию в 1985 году. Ступенчатая зависимость имеет качественные объяснения, однако до сих пор удовлетворительной теории, объясняющей точность эффекта, нет.

Дополнение к квантовому эффекту Холла.

Дополнение 1. Приведем качественные соображения для пояснения движения электронов в плоскости. Уравнение движения электрона в магнитном поле (см также §3.4):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{B}] \quad (3.15.21)$$

Поскольку сила всегда направлена перпендикулярно к вектору скорости, то энергия сохраняется и электрон движется по окружности. Можно увидеть, если умножить (3.15.21) скалярно на вектор скорости \vec{v} :

$$m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{c} \vec{v} [\vec{v}, \vec{B}] = 0$$

Откуда

$$\frac{m}{2} \frac{d\vec{v}^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = 0 \quad \text{и} \quad W = \frac{mv^2}{2} = \text{const} \quad (3.15.22)$$

Электрон движется по окружности: $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, тогда пользуясь (3.15.21) имеем (см рис. 15.9):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\omega}, \vec{v}] = -\frac{e}{mc} [\vec{v}, \vec{B}] = \frac{e}{mc} [\vec{B}, \vec{v}]$$

Из сравнения этих соотношений получаем циклотронную частоту и циклотронный радиус:

$$\vec{\omega} = \frac{e\vec{B}}{mc} \quad (3.15.23)$$

$$r_c = \frac{mc}{eB} v$$

Координаты электрона $x(t)$ и $y(t)$ как функции времени на плоскости (x,y) испытывают гармонические колебания, энергия которых *квантуется*:

$$W_{\text{кол}} = W_{\text{вращ}} = \left(k + \frac{1}{2} \right) \cdot \hbar\omega, \quad (3.15.24)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Расстояние между уровнями энергии при $\Delta k = 1$ определяется:

$$\Delta W = \hbar\omega = \frac{m}{2} \omega^2 r_c^2.$$

Откуда получаем циклотронный радиус:

$$r_c^2 = \frac{2\hbar}{m\omega} = \frac{2\hbar c}{eB} \quad (3.15.25)$$

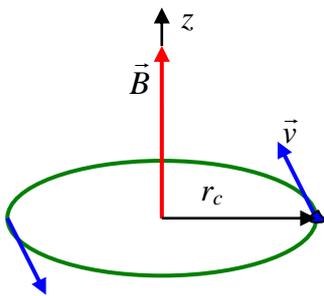


Рис. 15.9.

и получаем, что циклотронный радиус не зависит от массы частицы (это важно!).

Дополнение 2. Квант магнитного потока. Из квантования орбиты по правилу квантования Бора находим скорость электрона:

$$p \cdot 2\pi R = 2\pi k\hbar \quad \text{и} \quad v = \frac{k\hbar}{mR}$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$. Тогда радиус орбиты, исходя из (3.15.23), равен:

$$R^2 = \frac{cmv}{eB} = k \frac{c\hbar}{eB}$$

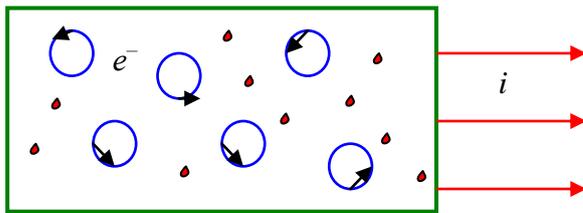
Сосчитаем поток магнитной индукции через орбиту электрона.

$$\Phi = \pi R^2 \cdot B = k \frac{\pi c\hbar B}{2\pi eB} = k \frac{ch}{2e}$$

При $k = 1$ получаем квант магнитного потока:

$$\Phi_0 = \frac{ch}{2e} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$$

Квант магнитного потока, зависящий только от мировых констант, является наименьшим возможным значением магнитного потока.



B , (направлено на нас)

Рис. 15.10.

Вернемся к двумерному эффекту Холла. Если тока нет, то электрон кружится на месте. Если ток есть, то крутящийся электрон движется поступательно (рис. 15.10). Радиус “кружка” определяется формулой (3.15.25). С математической точки зрения эффект Холла можно представить как дрейф вращающегося электрона вдоль приложенного напряжения.

Сколько можно “уложить кружков”, если учесть невозможность их пересечения (по принципу Паули для ферми частиц). Площадь кружка, учитывая

(3.15.25), равна:

$$\pi r_c^2 = \frac{2\pi\hbar c}{eB} = \frac{1}{n_e},$$

где n_e – концентрация электронов при условии, что “кружки” заполняют всю плоскость:

$$n_e = \frac{eB}{2\pi\hbar c} \quad (3.15.26)$$

Холловская проводимость равна:

$$\sigma_{xy} = \frac{n_e e c}{B} = \frac{eB e c}{2\pi\hbar c B} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} = \frac{e^2}{h} \quad (3.15.27)$$

Оказывается, и это важно, что в двумерном случае площадь “кружка” πr_c^2 есть фазовый объем и эти “кружки” не могут накладываться друг на друга, поскольку только одна ферми частица может находиться в этом элементе фазового объема. Но над плоскостью электронов можно заполнить еще одну плоскость электронов (плоскость или уровень Ландау – выше по энергии), пока “влезает” в толщину 10 \AA . Пусть у нас заполнено N плоскостей, тогда Холловская проводимость равна:

$$\sigma_{xy} = N \frac{e^2}{h} \quad (3.15.28)$$

Как уровень Ландау заполнен и до момента заполнения следующего наблюдаем плато в проводимости (см рис. 15.11). Если уровни Ландау заполняются, то это и есть моменты перехода с одного плато на уровень другого плато.

Интересен тот факт, что если рассмотреть обычное омическое сопротивление ρ_{xx} , то оно равно нулю, когда Холловская проводимость соответствует (3.15.28)). В момент

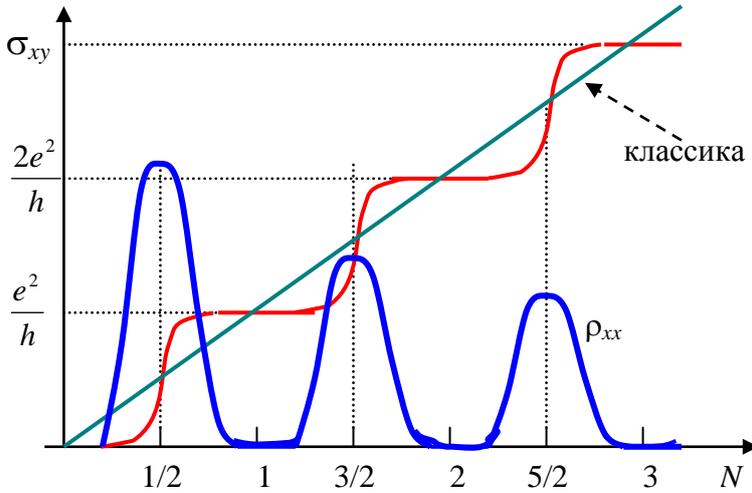


Рис. 15.11.

проводимости соответствует заполненному уровню Ландау (т.е. перестройки σ_{xy} омическое сопротивление отлично от нуля $\rho_{xx} \neq 0$).

Примечание 2. Клаус фон Клитцинг, немецкий физик (1980 г.), 1943 г., Нобелевская премия по физике 1985