4.3. Взаимная индукция и самоиндукция.

4.3.1. <u>Взаимная индукция</u>.

Введем понятие потенциальной функции тока во внешнем магнитном поле. Работа магнитного поля пропорциональна изменению магнитного потока (см § 4.1):

$$\delta A = \frac{I}{c}\delta\Phi \tag{4.3.1}$$

Если запишем, что $\delta A = -(dU)_I$, то физически это означает, что механическая работа сил магнитного поля равна убыли функции U, которая играет роль *потенциальной или силовой функции* тока в магнитном поле. Подстрочный индекс “I” означает, что приращение потенциальной функции следует определять при постоянной силе тока. Сама силовая функция равна:

$$dU = -\delta A = -\frac{I}{c}d\Phi, \qquad U = -\frac{I}{c}\Phi \tag{4.3.2}$$

Потенциальную функцию U не следует отождествлять с потенциальной энергией магнитного поля, поскольку, как нам известно, изменение энергии магнитного поля нельзя определить только по механической работе сил магнитного поля при перемещении проводника. Тем не менее, введение такой функции, безусловно, удобно и полезно. В частности, легко убедиться, что устойчивое равновесие контура постоянного тока в магнитном поле соответствует минимуму потенциальной функции U, или, соответственно, максимуму магнитного потока Φ.

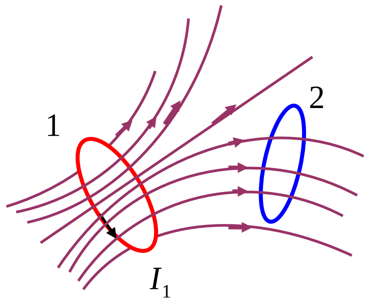

Рис. 3.1.

Электромагнитная индукция возникает во всех случаях, когда изменяется магнитный поток через контур. При этом совершенно не важно, чем вызвано это изменение потока. Если в некотором контуре течет изменяющийся во времени ток, то магнитное поле этого тока также будет изменяться.

Пусть контуры 1 и 2 расположены достаточно близко друг к другу (рис. 3.1). Между контурами существует магнитная связь, наличие которой проявляется в том, что при всяком изменении тока в одном из контуров в другом контуре изменяется пронизывающий его магнитный поток и возникает ЭДС индукции. Это явление называют *взаимной индукцией*.

Рассмотрим взаимодействие 2-х замкнутых токов I_1 и I_2 (рис. 3.2). Пусть $\vec{B}_1$, $\vec{A}_1$ и $\vec{B}_2$, $\vec{A}_2$ – вектора индукции и векторные потенциалы магнитных полей, создаваемых токами I_1 и I_2, текущими в контурах 1 и 2, соответственно. Тогда магнитный поток поля $\vec{B}_1$ тока I_1 через контур 2 определяется:

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 = \int_{S_2} rot\vec{A}_1 d\vec{S}_2 = \oint_{L_2} \vec{A}_1 d\vec{l}_2 , \tag{4.3.3}$$

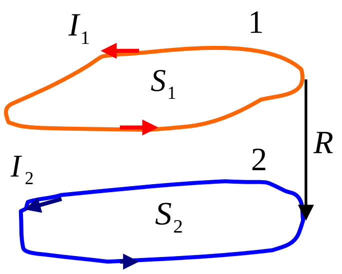

Рис. 3.2.

где S_2 поверхность, опирающаяся на контур 2, длиной L_2, $d\vec{l}_2$ – элемент этого контура. Вспомним, что вектор-потенциал линейного тока равен (см §3.7 формула (3.7.16)):

$$\vec{A}_1 = \frac{I_1}{c}\oint_{L_1}\frac{d\vec{l}_1}{R},$$

где $d\vec{l}_1$ – элемент первого контура, а R – расстояние от рассматриваемого элемента контура до точки наблюдения (см также Рис. 3.2). Тогда для магнитного потока через второй контур имеем:

$$\Phi_{12} = \oint_{L_2}\vec{A}_1 d\vec{l}_2 = \oint_{L_2}\left[\frac{I_1}{c}\oint_{L_1}\frac{d\vec{l}_1}{R}\right]d\vec{l}_2 = \frac{I_1}{c}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}, \tag{4.3.4}$$

где интегрирование идет по обоим контурам. Совершенно аналогично получаем магнитный поток, создаваемый током контура 2 через контур 1:

$$\Phi_{21} = \frac{I_2}{c} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R} \tag{4.3.5}$$

Перепишем полученные выражения в виде:

$$\Phi_{12} = \frac{I_1}{c} L_{12}, \quad \Phi_{21} = \frac{I_2}{c} L_{21} \tag{4.3.6}$$

где L_{12} и L_{21} – *коэффициенты взаимной индукции*. Из полученных нами выражений следует, что они равны:

$$L_{21} = L_{12} = \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}\,. \tag{4.3.7}$$

Если токи I_1 и I_2 нельзя считать линейными, т.е. поле одного из токов заметно меняется на протяжении сечения другого тока, то следует перейти к объемным токам. Для объемных элементов тока $I\,d\vec{l} = \vec{j}dV$ получаем:

$$L_{21} = L_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{R} \tag{4.3.8}$$

где V_1 и V_2 – полные объемы контуров с токами.

То замечательное свойство взаимной индукции контуров, что (в отсутствие ферромагнетиков) коэффициенты взаимной индукции одинаковы $L_{21} = L_{12}$, называют *теоремой взаимности*. Благодаря этой теореме можно не делать различия между коэффициентами L_{12} и L_{21}, а говорить просто о взаимной индуктивности контуров.

Используя данное выше определение, можем записать потенциальную функцию тока I_2 в поле тока I_1 через коэффициенты взаимной индукции:

$$U_{12} = -\frac{I_2}{c}\Phi_{12} = -\frac{1}{c^2} L_{12} I_1 I_2\,; \tag{4.3.9}$$

Таким же образом выражается потенциальная функция тока I_1 в поле тока I_2:

$$U_{21} = -\frac{I_1}{c}\Phi_{21} = -\frac{1}{c^2} L_{21} I_1 I_2\,. \tag{4.3.10}$$

Величина $U_{12} = U_{21}$ играет роль *взаимной потенциальной энергии токов* I_1 и I_2 в том смысле, что механическая работа сил взаимодействия этих токов при перемещении одного из них или обоих одновременно равна убыли функции U_{12}.

Если много взаимодействующих контуров, то взаимная потенциальная энергия равна сумме:

$$U = -\frac{1}{2c^2} \sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j \tag{4.3.11}$$

Коэффициенты взаимной индукции (взаимные индуктивности) являются величинами алгебраическими. При перемене направления одного из токов и сохранении направления другого знак коэффициента взаимной индукции изменяется на обратный. Взаимная индукция лежит в основе действия трансформаторов.

4.3.2. Самоиндукция.

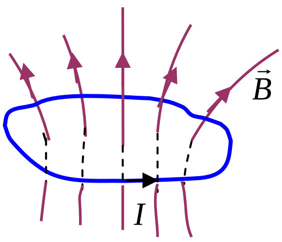

Рис. 3.3.

Электрический ток в любом контуре создает магнитный поток $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}$, пронизывающий этот контур. Рассмотрим единичный контур с током, величина которого может меняться во времени (рис. 3.3). Изменение тока I в контуре влечет за собой изменение магнитного потока Φ через контур, а при изменении потока в контуре возникает ЭДС индукции. Это явление носит название *явление самоиндукции*.

Так же, как и при рассмотрении взаимной индукции, формально запишем:

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S rot\vec{A}d\vec{S} = \oint_L \vec{A}d\vec{l}_1 = \frac{I_1}{c}\oint_L\oint_L \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_1'}{R}. \qquad (4.3.12)$$

Здесь $d\vec{l}_1, d\vec{l}_1'$ – элементы рассматриваемого контура L, а R – расстояние между этими элементами.

Однако, рассматривая взаимодействие смежных элементов тока рассматриваемого контура, мы уже не можем считать этот ток линейным, поэтому перейдем к объемным токам

$$\vec{A} = \frac{I_1}{c}\oint_L \frac{d\vec{l}_1}{R} = \frac{1}{c}\int_V \frac{\vec{j}_1 dV}{R} \qquad (4.3.13)$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S rot\vec{A}d\vec{S} = \oint_L \vec{A}d\vec{l} = \frac{1}{c}\oint_L\int_V \frac{\vec{j}_1 dV}{R} d\vec{l}_1 = \frac{1}{cI_1}\int_V\int_V \frac{\vec{j}_1\vec{j}_1' dV dV'}{R} = \frac{1}{c} I_1 L_{11}. \qquad (4.3.14)$$

где ввели коэффициент

$$L_{11} = \frac{1}{I_1^2}\int_V\int_V \frac{\vec{j}_1\vec{j}_1' dV dV'}{R}. \qquad (4.3.15)$$

Итак, опуская значки, получаем

$$\Phi = \frac{1}{c} I_1 L_{11} = \frac{1}{c} LI. \qquad (4.3.16)$$

Здесь введенный коэффициент L – *индуктивность* рассматриваемого контура. Коэффициент L зависит от размеров и формы контура и от магнитных свойств среды, в которой находится контур. Если в пространстве нет ферромагнетиков, то индуктивность L не зависит от силы тока в контуре.

Потенциальная функция U_{11} сил взаимодействия элементов одного и того же тока I_1 равна:

$$U_{11} = -\frac{1}{2c^2}\int_V\int_V \frac{\vec{j}\vec{j}' dV dV'}{R} = -\frac{1}{2c^2} L_{11} I_1^2. \qquad (4.3.17)$$

Множитель $\frac{1}{2}$ появляется в связи с тем, что взаимодействие каждой пары элементов тока $\vec{j}_1 dV$ и $\vec{j}_1' dV'$ в приведенном интеграле учитывается дважды; R – расстояние между элементами объема dV и dV'.

Изменение силы тока в контуре вызывает изменение магнитного потока в нем и приводит к возникновению в контуре *ЭДС самоиндукции*. ЭДС самоиндукции, следуя общему правилу, равна:

$$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial(LI)}{\partial t}, \qquad (4.3.18)$$

Если $L = const$, то получаем:

$$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c^2} L\frac{\partial I}{\partial t}. \qquad (4.3.19)$$

Правило Ленца. *ЭДС самоиндукции всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока, которое ее вызывает*.

ЭДС самоиндукции стремится сохранить ток неизменным: она противодействует току, когда он увеличивается, и поддерживает ток, когда он уменьшается, т.е. здесь ток проявляет “инерционные” свойства. Эффекты индукции стремятся сохранить постоянным магнитный поток через контур точно так же, как механическая инерция стремится сохранить неизменной скорость тела.

Рассмотрим пример. Рассчитаем индуктивность длинного соленоида. Выберем контур как показано на рисунке 3.4. По теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$ можем записать (см Глава 3, §3.6, формула (3.6.13) и рис.6.8):

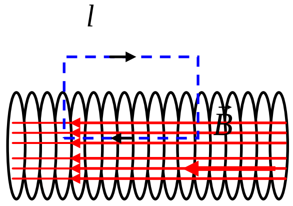

Рис. 3.4.

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = Hl = \frac{4\pi}{c} IN = \frac{4\pi}{c} Inl, \qquad (4.3.20)$$

где I – ток через соленоид; N и n – число и плотность витков соленоида, соответственно, l – длина выбранного контура интегрирования. Если μ – магнитная проницаемость материала, заполняющего объем соленоида, то $B = \mu H$ и тогда магнитная индукция внутри соленоида равна

$$B = \frac{4\pi\mu}{c} In .$$

Магнитный поток, пронизывающий соленоид равен:

$$\Phi = BSnl = \frac{4\pi\mu}{c} InSnl = \frac{4\pi\mu}{c} n^2 IV , \qquad (4.3.21)$$

Здесь V – объем соленоида. С другой стороны, $\Phi = \frac{1}{c} LI$. Приравнивая, получаем индуктивность длинного соленоида:

$$L = 4\pi\mu n^2 V . \qquad (4.3.22)$$

Важно отметить, что индуктивность пропорциональна объему и квадрату плотности витков соленоида.

4.3.3. Еще о потенциальной энергии и единицах измерения

Возвращаясь к случаю системы двух токов, заметим, что общая потенциальная “энергия” U этой системы равна сумме их взаимной “энергии” $U_{12}(= U_{21})$ и собственных потенциальных “энергий” U_{11} и U_{22} каждого из них:

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2\right). \qquad (4.3.23)$$

Учитывая, что $L_{12} = L_{21}$, можно записать

$$U = -\frac{1}{2c^2}\left(L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1 + L_{22} I_2^2\right) = -\frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k . \qquad (4.3.24)$$

Последнее выражение применимо к системе произвольного числа токов (контуров), если производить суммирование по всем возможным парам индексов i и k $(i, k = 1,2,..., n)$.

Примечание 1. В системе СИ взаимная и собственная потенциальные “энергии” токов записываются, соответственно, как: $U_{12} = -L_{12} I_1 I_2$ и $U_{11} = -\frac{1}{2} L_{11} I_1^2$

В *гауссовой системе единиц индуктивность* измеряется в сантиметрах: $[L] =$ *см*. При этом 1 сантиметр – это индуктивность такого витка, в котором ток силою 1 ед. $CGSM$ (1 ед. тока $CGSM$ = $1/c$ ед. $CGSE$) создает магнитный поток 1 Максвелл (*Мкс*). В самом деле, из закона Био - Савара

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

имеем следующую размерность для индукции магнитного поля (см пункт 3.5.4 в §3.5):

$$[B] = 1 Гс = \frac{[I][l]}{[l^2][c]} = \frac{CGSE_I \cdot c}{см \cdot см} = \frac{CGSE_q}{см^2}$$

Отсюда для потока магнитной индукции $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}$ получаем:

$$[\Phi] = [B][l^2] = CGSE_q = 1 Мкс ,$$

Из формулы $\Phi = \frac{1}{c} LI$ (4.3.16) имеем для потока

$$[\Phi] = 1 Мкс = \left[\frac{IL}{c}\right] = \frac{CGSE_q}{см} [L] = CGSE_q .$$

Из последнего получается, что индуктивность в системе Гаусса измеряется в сантиметрах

$$[L] = см \qquad (4.3.25)$$

В *системе СИ* соотношения для потока и ЭДС самоиндукции имеют вид:

$$\Phi = LI\ ; \qquad \mathsf{E}_S = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -L\frac{\partial I}{\partial t}\ ; \tag{4.3.26}$$

$$\mathsf{E}(Вольт) = -\frac{d\Phi(Вебер)}{dt}$$

Вебер – такая единица магнитного потока, при изменении которого на 1 Вебер за 1 секунду в контуре возбуждается ЭДС в 1 Вольт:

$$[\Phi] = 1Вб = 1В \cdot 1с\,.$$

Индуктивность измеряется в единицах Генри: [L] = 1 Генри = 1 *Гн*. 1 Генри – это индуктивность такого витка, в котором ток силой 1 Ампер создает магнитный поток 1 Вебер (*Вб*):

$$1Гн = \frac{1Вб}{1А}$$

Найдем связь между единицами потока в гауссовой и СИ системах. Связь между *Вб* и *Мкс* единицами можно получить из следующего *численного* равенства, вспоминая, что единица потенциала в СИ в 300 раз меньше единиц потенциала в Гауссовой системе единиц: $1В = 300\ CGSE_V$:

$$\mathsf{E}(Вольт) = -\frac{d\Phi(Вебер)}{dt} = 300 \cdot \mathsf{E}(CGSE_V) = -\frac{300}{c}\frac{d\Phi(Мкс)}{dt} \approx -10^{-8}\frac{d\Phi(Мкс)}{dt} \tag{4.3.27}$$

Из (4.3.27) следует соотношение между единицами потока вектора индукции магнитного поля:

$$1Вб = 10^8\,Мкс\,.$$

Тогда можно получить соотношение единиц индуктивности:

$$1Гн = \frac{1Вб}{1А} = \frac{10^8\,Мкс}{\frac{1}{10}CGSM_I} = 10^9\,см \tag{4.3.28}$$

В системе *СИ* индуктивность длинного соленоида записывается

$$L = \mu\mu_0 n^2 V\,,$$

где n – число витков на единицу длины. Отсюда получаем размерность для постоянной магнитной величины

$$[\mu_0] = \frac{Гн}{м}\,,$$

которая упоминалась выше в §3.5.