4.4. Энергия магнитного поля.

4.4.1. Об энергии взаимодействующих токов.

Ранее мы показали, что при изменении любого потока через контур с током магнитное поле совершает работу

$$dA = \frac{I}{c}d\Phi \qquad (4.4.1)$$

Это соотношение было получено при деформации или движении контура с током. Можно получить, *что эта же работа совершается сторонними силами* (ЭДС источника) *при появлении тока и магнитного потока в контуре,* т.е. энергия передается магнитному полю.

Найдем работу, совершаемую источником ЭДС для увеличения тока от 0 до значения I, и тем самым получим энергию магнитного поля, связанного с этим током. Наращиваем ток в контуре каким-либо образом, при этом возрастает и магнитный поток Φ. Возникнет ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (4.4.2)$$

Тогда элементарная работа, которую должен совершить внешний источник ЭДС против ЭДС самоиндукции, чтобы увеличить ток, определяется (опять напомним, что ЭДС равна работе по перетаскиванию единицы заряда по замкнутому контуру):

$$dA = -\mathcal{E}_S dq = -\mathcal{E}_S I dt \qquad (4.4.3)$$

Подставляя (4.4.2), получаем формулу (4.4.1), что и требовалось доказать. На что идет эта работа? Рассмотрим, что изменилось после изменения тока в контуре:

(1) стало выделяться тепло (на это идет работа внешней ЭДС в стационарном режиме);

(2) появилось магнитное поле контура (его появлению «сопротивлялось» ЭДС самоиндукции). Здесь в переходном режиме работа ЭДС самоиндукции идет на увеличение энергии магнитного поля

$$dW = \frac{I}{c}d\Phi \qquad (4.4.4)$$

Итак, если имеем один контур, который обладает индуктивностью L, то запасенная энергия магнитного поля контура равна:

$$W = \frac{L}{c^2}\int IdI = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{I\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L} \qquad (4.4.5)$$

На случай N витков имеем потенциальную энергию токов, взаимодействующих по закону Ампера (см (4.3.11)):

$$W = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k \qquad (4.4.6)$$

где L_{ik} при $i = k$ индуктивность i -го контура, при $i \neq k$ взаимная индуктивность i -го и k -го контуров. Эти формулы выражают магнитную энергию через токи I и магнитные потоки. Это потенциальная энергия токов, взаимодействующих по закону Ампера. Более подробное рассмотрение этого вопроса см в Дополнении 1.

4.4.2. Энергия магнитного поля соленоида.

Энергию магнитного взаимодействия можно выразить через напряженность и индукцию магнитного поля. Для начала разберем пример длинного соленоида. Запишем энергию соленоида с током по общей формуле (4.4.4). Напряженность магнитного поля длинного соленоида была определена ранее (см Глава 3, §3.6, а также конец §4.3):

$$H = \frac{4\pi}{c}nI \qquad (4.4.7)$$

Тогда изменение энергии в соленоиде ($d\Phi = SdB$) равно:

$$dW = \frac{I}{c}d\Phi \cdot N = \frac{cH}{4\pi nc}d\Phi \cdot nl = \frac{HSl \cdot dB}{4\pi} = \frac{V}{4\pi}HdB$$

$$dW = \frac{V}{4\pi}\left(\vec{H}, d\vec{B}\right) \qquad (4.4.8)$$

Здесь V – объем соленоида. Тогда дифференциал объемной плотности магнитной энергии:

$$dw = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{4\pi}\vec{H}d\vec{B} \tag{4.4.9}$$

Плотность энергии магнитного поля:

$$w = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H}d\vec{B} \tag{4.4.10}$$

В частности, если магнитная среда изотропна и магнитная проницаемость постоянна, имеем $\vec{B} = \mu\vec{H}$, то плотность энергии:

$$w = \frac{1}{4\pi}\int \mu H dH = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\vec{H}\vec{B}}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu} \tag{4.4.11}$$

и полная энергия магнитного поля определяется интегрированием по всему пространству, где имеется магнитное поле:

$$W = \int_V w dV \tag{4.4.12}$$

Итак, получили, что магнитная энергия локализована в пространстве с объемной плотностью w. Это представление теории поля, аналогичное тому, как получали в электростатике (см §2.6).

4.4.3. Энергия магнитного поля

Можно показать в общем случае справедливость формул (4.4.9) - (4.4.12)

$$dw = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}, d\vec{B}\right), \quad w = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H}d\vec{B}, \quad W = \int w dV\,. \tag{4.4.13}$$

Ограничимся одним неподвижным витком, тогда:

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}, \quad d\Phi = \int_S d\vec{B}d\vec{S}\,,$$

где интегрирование ведется по произвольной поверхности, натянутой на контур с током. Приращение энергии равно:

$$dW = \frac{I}{c}d\Phi = \frac{I}{c}\int_S d\vec{B}d\vec{S}$$

Введем векторный потенциал: $\vec{B} = rot\vec{A}$ и тогда $d\vec{B} = d\left(rot\vec{A}\right) = rot\left(d\vec{A}\right)$, поскольку дифференциал берется по внутренним переменным (r_q), а ротор по внешним (r_a):

$$\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}_q)dV_q}{r_{aq}}, \text{ где } r_{aq} = \left|\vec{r}_a - \vec{r}_q\right|.$$

Тогда для приращения энергии имеем:

$$dW = \frac{I}{c}\int_S rot\left(d\vec{A}\right)d\vec{S} = \frac{I}{c}\oint_L d\vec{A}d\vec{l}\,, \tag{4.4.14}$$

Здесь воспользовались теоремой Стокса, а интегрирование проводится по контуру с током. Заменим линейный элемент тока на объемный элемент, а интегрирование по объему распространим на все пространство (это можно сделать, т.к. там, где плотность токов равна нулю, интеграл также равен нулю):

$$dW = \frac{1}{c}\int_V \left(d\vec{A}, \vec{j}\right)dV \tag{4.4.15}$$

Воспользуемся: $rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, тогда

$$dW = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(d\vec{A}, rot\vec{H}\right)dV\,. \tag{4.4.16}$$

Из векторного анализа известно соотношение:

$$\vec{A}rot\vec{H} = \vec{H}rot\vec{A} + div\left[\vec{H}, \vec{A}\right] = \vec{H}\vec{B} + div\left[\vec{H}, \vec{A}\right]. \tag{4.4.17}$$

Подставляя полученное выражение в интеграл (4.4.16) и используя теорему Гаусса, получаем:

$$dW = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H} rot\left(d\vec{A}\right) dV - \frac{1}{4\pi}\int div\left[d\vec{A},\vec{H}\right] dV = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H} d\vec{B} dV - \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[d\vec{A},\vec{H}\right] d\vec{S}\,, \qquad (4.4.18)$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$rot\left(d\vec{A}\right) = d\left(rot\vec{A}\right) = d\vec{B}$$

опять же из-за того, что дифференциал и производные берутся по разным переменным (r_q) и (r_a), а также теоремой Гаусса для второго интеграла. Интегрирование в (4.4.18) распространено на все пространство, охватывающее все взаимодействующие токи и поле этих токов. В качестве поверхности интегрирования для второго интеграла можно взять бесконечно удаленную поверхность. Если все токи текут в конечной области пространства, то магнитное поле будет убывать на бесконечности достаточно быстро и рассматриваемый интеграл обратится в нуль. Тогда приращение энергии поля равно

$$dW = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H} d\vec{B} dV\,. \qquad (4.4.19)$$

Или иначе:

$$W = \int_V w dV\,, \qquad (4.4.20)$$

где ввели плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H} d\vec{B} \qquad (4.4.21)$$

Эти же соотношения и энергия двух взаимодействующих токов получены в Дополнении 2.

Дополнение 1.

Энергия магнитного взаимодействия токов (см И.Е.Тамм “Основы теории электричества” §79).

Рассмотрим индукционное взаимодействие переменных токов I_1 и I_2 с энергетической точки зрения. Очевидно, что приращение энергии в системе будет определяться вкладами от различных механизмов, которые можно рассматривать как аддитивные. При этом необходимо учесть следующие превращения энергии: 1) выделение Джоулева тепла Q в цепи токов, 2) работу P сторонних электродвижущих сил, 3) механическую работу A, совершаемую при перемещении контуров тока, и, наконец, 4) энергию магнитного взаимодействия токов W.

Итак, рассмотрим изменение всех этих видов энергии за бесконечно малый элемент времени dt. За это время должно иметь место увеличение механической энергии (например, кинетической энергии движения проводников) на величину δA (и оно равно убыли потенциальной функции этих токов (4.3.28)):

$$\delta A = -d\left(U\right)_I = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}I_1^2 dL_{11} + I_1 I_2 dL_{12} + \frac{1}{2}I_2^2 dL_{22}\right). \qquad (4.4.д1)$$

Промежуток времени dt выбирается настолько малым, что силы токов могут считаться практически постоянными в течение этого промежутка. За время dt в обоих контурах выделяется количество Джоулева тепла, равное:

$$Qdt = \left(I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2\right)dt\,, \qquad (4.4.д2)$$

а сторонние электродвижущие силы E^{cmp} совершат за это же время (например, за счет химической энергии включенных в цепь контуров гальванических элементов) в обоих контурах работу

$$Pdt = \left(I_1 \mathrm{E}_1^{cmp} + I_2 \mathrm{E}_2^{cmp}\right)dt\,. \qquad (4.4.д3)$$

Здесь Q и P – тепловая мощность и мощность сторонних сил, соответственно; $R_{1,2}$ – электрические сопротивления контуров.

Итак, за время dt должно иметь место увеличение механической энергии, увеличение тепловой энергии и уменьшение энергии источников электродвижущих сил (химической энергии аккумуляторов). Таким образом, общее увеличение всех видов энергии равно

$$\Delta = \delta A + \left(Q - P\right)dt \qquad (4.4.д4)$$

Вычисляем разность мощностей отдельно:

$$Q - P = I_1\left(I_1 R_1 - \mathrm{E}_1^{cmp}\right) + I_2\left(I_2 R_2 - \mathrm{E}_2^{cmp}\right) = I_1 \mathrm{E}_1^{ind} + I_2 \mathrm{E}_2^{ind} \qquad (4.4.д5)$$

Здесь мы воспользовались разделением полной электродвижущей силы на ЭДС сторонних сил и ЭДС индукции

$$IR = \mathsf{E}^{стр} + \mathsf{E}^{ind}. \qquad (4.4.д6)$$

Теперь пользуясь определением потоков через первый и второй контуры, соответственно:

$$\Phi_1 = \frac{1}{c}L_{11}I_1 + \frac{1}{c}L_{12}I_2 \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \frac{1}{c}L_{21}I_1 + \frac{1}{c}L_{22}I_2, \qquad (4.4.д7)$$

можно записать ЭДС индукции в первом контуре в виде:

$$\mathsf{E}_1^{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{c^2}\left(L_{11}\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt} + I_1\frac{dL_{11}}{dt} + I_2\frac{dL_{12}}{dt}\right) \qquad (4.4.д8)$$

Аналогично для второго контура. Тогда имеем:

$$(Q-P)dt = -\frac{1}{c^2}\left(L_{11}I_1dI_1 + L_{12}I_1dI_2 + L_{12}I_2dI_1 + L_{22}I_2dI_2\right) \qquad (4.4.д9)$$

Общее увеличение всех этих видов энергии равно

$$\Delta = -\frac{1}{c^2}\left(L_{11}IdI_1 + \frac{1}{2}I_1^2dL_{11} + L_{12}I_1dI_2 + L_{12}I_2dI_1 + I_1I_2dL_{12} + L_{22}I_2dI_2 + \frac{1}{2}I_2^2dL_{22}\right), \qquad (4.4.д10)$$

или далее

$$\Delta = -\frac{1}{c^2}d\left(\frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2\right). \qquad (4.4.д11)$$

Таким образом, всякое изменение конфигурации контуров и силы токов в них приводит к увеличению суммы механической, тепловой и химической энергии этой системы контуров на величину Δ.

Из закона сохранения энергии следует, что эти процессы должны сопровождаться эквивалентным уменьшением некоторого другого вида энергии. Чтобы определить этот вид энергии, следует заметить, что помимо уже учтенных нами процессов с перемещением проводников и изменением токов в них неразрывно связаны лишь силы магнитного взаимодействия этих токов. Поэтому магнитному взаимодействию токов необходимо приписать определенную магнитную энергию W, за счет эквивалентного изменения dW которой и происходит приращение всех прочих видов энергии.

$$dW = -\Delta = +\frac{1}{c^2}d\left(\frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2\right). \qquad (4.4.д12)$$

Следовательно, имеем:

$$W = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2\right). \qquad (4.4.д13)$$

Аддитивную постоянную, появляющуюся при интегрировании, кладут равной нулю для того, чтобы в отсутствие токов $(I_1 = I_2 = 0)$ магнитная энергия оказалась равной нулю. Это выражение (4.4.д13) можно записать следующим образом

$$W = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k}L_{ik}I_iI_k. \qquad (4.4.д14)$$

Эта же формула справедлива и для произвольного n числа контуров, при этом индексы i и k будут пробегать все значения от 1 до n.

Сравнивая полученные выражения, получаем $W = -U$. Подчеркнем, что смысл величин W и U совершенно различен. Действительно, убыль потенциальной функции $-(dU)_I$ равна механической работе A, совершаемой силами магнитного поля (силу тока полагаем постоянной). Между тем убыль магнитной энергии $-dW$ равна сумме приращений всех видов энергии, а не только энергии механической (учитываем и изменение силы тока). Поэтому, в частности, трудно было ожидать столь простого соотношения между величинами W и U, которое мы получили.

В случае постоянных токов в неподвижных проводниках равны нулю механическая работа A, изменение магнитной энергии dW и ЭДС индукции E^{ind}. Поэтому $Q = P$, т.е. работа сторонних сил целиком переходит в тепло.

При перемещении проводников совершается механическая работа и появляется ЭДС индукции, поэтому баланс между выделенной теплотой и работой сторонних сил нарушается. “Избыточная” затрата энергии сторонних сил расходуется не только на совершение механической работы, но и идет на увеличение магнитной энергии системы проводников.

Дополнение 2. Энергия магнитного поля.
Полученное нами выражение для энергии магнитного взаимодействия токов в отсутствие ферромагнетиков

$$W = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k \qquad (4.4.д15)$$

по своей форме аналогично выражению энергии взаимодействия покоящихся электрических зарядов

$$W_Э = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{q_i q_k}{r_{ik}} \qquad (i \neq k).$$

Поэтому, выражая магнитную энергию токов в виде интеграла по всему объему, мы получаем возможность интерпретировать энергию W как энергию поля.

$$W = -U = \frac{1}{2c}\int \vec{A}\vec{j}dV\,. \qquad (4.4.д16)$$

Учитывая, что $rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, получаем

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{A}rot\vec{H}dV\,. \qquad (4.4.д17)$$

Из векторного анализа $\vec{A}rot\vec{H} = \vec{H}rot\vec{A} + div\left[\vec{H},\vec{A}\right] = \vec{H}\vec{B} + div\left[\vec{H},\vec{A}\right]$.
Подставляя полученное выражение в интеграл (4.4.д17) и используя теорему Гаусса, получаем

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV + \frac{1}{8\pi}\int div\left[\vec{H},\vec{A}\right]dV = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV + \frac{1}{8\pi}\oint_S \left[\vec{H},\vec{A}\right]_n dS\,, \qquad (4.4.д18)$$

где интегрирование распространено на все пространство, охватывающее все взаимодействующие токи и поле этих токов. В качестве поверхности интегрирования для второго интеграла можно взять бесконечно удаленную поверхность. Если все токи текут в конечной области пространства, то магнитное поле будет убывать на бесконечности достаточно быстро и рассматриваемый интеграл обратится в нуль. Тогда

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV\,. \qquad (4.4.д19)$$

Полученное выражение может быть интерпретирована следующим образом: магнитная энергия локализована в поле и распределена по его объему с плотностью, равной

$$w = \frac{1}{8\pi}\vec{H}\vec{B}\,. \qquad (4.4.д20)$$

Полученные результаты справедливы при отсутствии в поле ферромагнетиков. Для изотропных магнетиков справедливо соотношение $\vec{B} = \mu\vec{H}$, поэтому можем записать:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu H^2 dV\,; \qquad w = \frac{1}{8\pi}\mu H^2\,. \qquad (4.4.д21)$$

Таким образом, при заданной напряженности магнитного поля энергия единицы его объема пропорциональна магнитной проницаемости среды.

В вакууме $\mu = 1$ и для энергии получаем:

$$w = \frac{1}{8\pi}H^2 = \frac{1}{8\pi}B^2\,. \qquad (4.4.д22)$$

Определим энергию магнитного поля $\vec{H}$ двух токов, находящихся в произвольной слабомагнитной среде. Если $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ напряженности полей, создаваемых каждым током в отдельности, то

$$H^2 = \left(\vec{H}_1 + \vec{H}_2\right)^2 = H_1^2 + 2\vec{H}_1\vec{H}_2 + H_2^2\,, \qquad (4.4.д23)$$

и общая энергия поля токов равна

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu H^2 dV = \frac{1}{8\pi}\int \mu H_1^2 dV + \frac{1}{4\pi}\int \mu H_1 H_2 dV + \frac{1}{8\pi}\int \mu H_2^2 dV = W_{11} + W_{12} + W_{22}\,. \qquad (4.4.д24)$$

Первый и последний члены этого равенства могут быть названы *собственной энергией* каждого из токов I_1 и I_2, а второй член – *взаимной энергией* этих токов. Сравнивая это выражение с выражением для энергии системы токов (4.4.д13)

$$W = \frac{1}{2c^2}\left(L_{11}I_1^2 + 2L_{12}I_1I_2 + L_{22}I_2^2\right),$$

получаем для произвольной слабомагнитной среды:

$$W_{11} = \frac{1}{8\pi}\int \mu H_1^2 dV = \frac{1}{2c^2}L_{11}I_1^2; \qquad W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \mu \vec{H}_1\vec{H}_2 dV = \frac{1}{c^2}L_{12}I_1I_2. \qquad (4.4.д25)$$

Полученные уравнения (4.4.д25) представляют собой наиболее общее (справедливое и при $\mu \neq const$) определение коэффициентов индукции. Из этого определения следует, что при заданной силе тока коэффициенты индукции можно рассматривать как меру энергии магнитного поля токов.

<u>Сравним формулы, обсуждаемые в этом параграфе, в системе СИ и в системе единиц Гаусса</u>:

	Система единиц СИ	Система единиц Гаусса
Элементарная работа	$\delta A = Id\Phi$	$dA = \frac{I}{c}d\Phi$
ЭДС самоиндукции	$\mathcal{E}_S = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$	$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$
Энергия магнитного поля	$W = \frac{1}{2}\int \vec{H}\vec{B}dV$	$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV$
Плотность энергии магнитного поля	$w = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}$	$w = \frac{\vec{H}\vec{B}}{8\pi}, \quad w = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H}d\vec{B}$
Плотность энергии в изотропной среде	$w = \frac{1}{2}\mu_0\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}$	$w = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu}$
Собственная энергия тока	$W_{11} == \frac{1}{2}L_{11}I_1^2$	$W_{11} = -\frac{1}{2c^2}L_{11}I_1^2$
Взаимная энергия токов	$W_{12} = L_{12}I_1I_2$	$W_{12} = U_{12} = -\frac{1}{c^2}L_{12}I_1I_2$