4.6. Система уравнений Максвелла.

4.6.1. Система уравнений Максвелла.

До сих пор мы рассматривали отдельные части созданной Максвеллом единой теории электрических и магнитных явлений. Теперь полученные результаты могут быть сведены в *полную систему уравнений электромагнитного поля*. Если эта система действительно полна и верна, то из нее должны однозначно следовать все свойства поля – как уже изученные, так и новые, предсказываемые теорией.

Система дифференциальных уравнений классической электродинамики носит название *системы уравнений Максвелла*, который впервые сформулировал эти уравнения в шестидесятых годах прошлого столетия и раскрыл их физический смысл. Заметим, что общепринятая ныне формулировка уравнений электродинамики принадлежит Г. Герцу.

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (a), \qquad div\vec{D} = 4\pi\rho \quad (б),$$
$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \quad (в), \qquad div\vec{B} = 0 \quad (г) \qquad (4.6.1)$$

Верхняя пара уравнений (a, $б$) указывает на то, что есть две причины возникновения электрического поля. Во-первых, его источником являются электрические заряды (закон Кулона), как сторонние, так и связанные:

$$div\vec{D} = 4\pi\rho, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad div\vec{P} = -\rho', \text{ т.е. } div\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho'). \qquad (4.6.2)$$

Во-вторых, электрическое поле $\vec{E}$ появляется всегда, когда меняется во времени магнитное поле (закон электромагнитной индукции – уравнение (a)).

Вторая пара уравнений ($в$, $г$) показывает, что магнитное поле возбуждается как движущимися зарядами (электрические токи), так и переменными электрическими полями. Но магнитных зарядов нет – о чем говорит уравнение ($г$). Напомним связь между векторами магнитного поля

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{J}, \quad rot\vec{J} = \frac{1}{c}\vec{j}_m,$$
$$\text{т.е.} \quad rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_m + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right), \qquad (4.6.3)$$

где $\vec{j}_m$ – плотность тока намагничивания, $\partial\vec{P}/\partial t$ – плотность тока поляризации. Первые три тока, входящие в это выражение, связаны с движением электрических зарядов, последний ток – с изменяющимся во времени электрическим полем.

Система уравнений Максвелла в интегральной форме.

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S} \quad (a), \qquad \oint_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi\int_V \rho dV, \quad (б)$$
$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S} \quad (в), \qquad \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \quad (c) \qquad (4.6.4)$$

Содержание этих уравнений заключается в следующем:

(a) Циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру, т.е. работа по перенесению единичного заряда, с точностью до коэффициента $1/c$ равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через любую поверхность, ограниченную данным контуром. Под электрическим вектором $\vec{E}$ понимается как вихревое электрическое поле, так и электростатическое поле, циркуляция которого равна нулю. Это *закон электромагнитной индукции*.

($б$) Поток вектора $\vec{D}$ через любую замкнутую поверхность с точностью до коэффициента 4π равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью. Это *закон Кулона*.

($в$) Циркуляция вектора $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру с точностью до коэффициента $4\pi/c$ равна полному току (сумма токов проводимости и смещения) через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром. Вихревое *магнитное поле возбуждается движущимися зарядами и переменным электрическим полем*.

(c) Поток вектора $\vec{B}$ через произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю. Это – свидетельство отсутствия *магнитных зарядов*.

Уравнения Максвелла, записанные в дифференциальной форме, предполагают, что входящие в них величины, а также постоянные, характеризующие среду, в пространстве и времени изменяются непрерывно и всюду конечны. Однако существуют поверхности разрыва, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно. Поэтому, чтобы система уравнений была полной, т.е. давала возможность определить характеристику поля по начальным условиям, эту систему дифференциальных уравнений необходимо дополнить *граничными условиями*, которым должны удовлетворять векторы электромагнитного поля на границе раздела сред:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \qquad E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \qquad \left[\vec{n}, \vec{H}_2\right] - \left[\vec{n}, \vec{H}_1\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}, \tag{4.6.5}$$

где σ – поверхностная плотность сторонних зарядов, $\vec{i}$ – поверхностная плотность тока проводимости на границе раздела сред.

Уравнения Максвелла в интегральной форме справедливы и в тех случаях, когда существуют поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, т.е. в уравнениях, записанные в интегральной форме, автоматически учтены граничные условия.

Однако, если электрическое и магнитное поля стационарны, т.е. не зависят от времени ($\vec{E} = const$ и $\vec{B} = const$), то система уравнений Максвелла распадается на две группы *независимых* уравнений, что позволяет рассматривать электрическое и магнитное поля как независимые друг от друга, например в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0, \qquad \oint_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi\int_V \rho dV, \tag{4.6.6}$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}d\vec{S}, \qquad \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \tag{4.6.7}$$

Эта возможность и была использована нами при отдельном изучении электростатики и магнитостатики.

Из уравнений Максвелла следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые: изменение во времени одного из них приводит к появлению другого. Поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, составляющая единое электромагнитное поле. *Уравнения поля линейны, что обеспечивает принцип суперпозиции.* В число фундаментальных уравнений не включено уравнение непрерывности – закон сохранения заряда, т.к. он включен уже в систему уравнений Максвелла (получается из уравнений $(б)$ и $(в)$ в (4.6.1) и (4.6.4)).

Всего получили 8 уравнений (2 векторных и 2 скалярных), но при этом имеем 16 переменных: $\vec{E}, D, \vec{B}, \vec{H}, \vec{j}$ и ρ.

Наиболее общая постановка задачи в электромагнетизме – определение всех полей в пространстве и во времени при первоначально заданных значениях $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Часто постановка задачи в электродинамике выглядит еще и следующим образом: необходимо найти электрические и магнитные поля при заданном распределении зарядов ρ (сторонних) и токов $\vec{j}$ (проводимости). Таким образом, надо найти 12 переменных величин при 8 уравнениях. Видно, что число определяемых переменных больше числа уравнений. Означает ли это, что система не доопределена? Чтобы разрешить подобные задачи необходимо включить связь между векторами $\vec{E}, D, \vec{B}, \vec{H}$.

4.6.2. Материальные уравнения.

Систему уравнений Максвелла необходимо дополнить соотношениями, в которые входят величины, характеризующие индивидуальные свойства среды. Эти соотношения называются *материальными уравнениями*. Вообще говоря, эти уравнения достаточно сложны и не обладают той общностью и фундаментальностью, которые присущи уравнениям Максвелла. Материальные уравнения наиболее просты в случае достаточно слабых и сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени электромагнитных полей. Если при этом среда изотропна и не содержит сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, то материальные уравнения имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}, \tag{4.6.8}$$

где ε, μ, σ – диэлектрическая и магнитная проницаемости и электропроводность среды, соответственно. Вычисление этих величин – трудная задача, поэтому обычно эти постоянные определяются феноменологически. Поле $\vec{E}$ включает в себя, в том числе, и поле сторонних сил, обусловленных химическими или тепловыми процессами.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме совместно с граничными условиями и материальными уравнениями составляют *полную* систему, позволяющую по заданным начальным значениям $\vec{E}$ и $\vec{B}$ *однозначно* определить электромагнитное поле в любой точке пространства и в любой момент времени.

С помощью материальных уравнений из системы уравнений можно исключить величины $\vec{j}, \vec{D}, \vec{H}$. Таким образом, остается только 6 неизвестных $\vec{E}$ и $\vec{B}$, если считать известным $\rho(t)$. Получаем 6 неизвестных и 8 уравнений, однако система получается не переполненной. Это связано с тем, что из дифференциальных уравнений (4.6.1 *б,в*) и (4.6.1 *а,г*) следуют одинаковые дифференциальные следствия.

Полная система уравнений вместе с уравнением движения заряженных частиц под действием силы Лоренца составляют фундаментальную систему уравнений. Эта система в принципе достаточна для описания всех электромагнитных явлений, в которых не проявляются квантовые эффекты.

Рассуждения, с помощью которых мы пришли к уравнениям Максвелла, ни в коем случае нельзя рассматривать как их доказательство или вывод. Эти уравнения, полученные путем обобщения опытных фактов, являются основными аксиомами, или постулатами электродинамики. Они играют в электродинамике такую же роль, как законы Ньютона в классической механике или начала термодинамики в молекулярной физике.

4.6.3. <u>О магнитном заряде. Магнитный монополь</u>.

Законы природы обнаруживают большую степень подобия между электрическими и магнитными полями. Имеется, однако, одно большое различие. Частицы с положительными и отрицательными электрическими зарядами постоянно наблюдаются в природе, создавая в окружающем пространстве кулоновское электрическое поле. Магнитные же заряды, ни положительные, ни отрицательные, никогда не наблюдались по отдельности. Магнит всегда имеет два разнесенных на концы равных по величине полюса – положительный и отрицательный. Магнитное поле вокруг магнита есть результирующее поле обоих полюсов.

После высказанной Ампером гипотезы о существовании внутримолекулярных токов и ее подтверждении казалось, идея магнитного заряда была благополучно “похоронена” и могла рассматриваться лишь в качестве вспомогательной. Из уравнений Максвелла для электромагнитного поля вытекает фундаментальная *асимметрия* между магнитными $\vec{H}, \vec{B}$ и электрическими $\vec{E}, \vec{D}$ величинами, особенно наглядная, если эти уравнения переписать в виде

$$\begin{aligned} div\vec{D} &= 4\pi\rho, & -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + rot\vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ div\vec{B} &= 0, & -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - rot\vec{E} &= 0 \end{aligned}, \qquad (4.6.9)$$

Еще нагляднее это проявляется, если рассмотреть эти уравнения для вакуума

$$\begin{aligned} div\vec{E} &= 4\pi\rho, & -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + rot\vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e \\ div\vec{B} &= 0, & -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - rot\vec{E} &= 0 \end{aligned} \qquad (4.6.10)$$

Эта асимметрия проявляется в отсутствии магнитных зарядов и их токов. Магнитное поле в этом смысле является вторичным эффектом электричества, возникая лишь при движении электрических зарядов. Если же отказаться от идеи “первородства” электричества, то из простых соображений симметрии можно было бы предположить существование магнитных зарядов и соответствующих им токов. Тогда в правых частях нижней пары уравнений Максвелла стояли бы не нули, а, соответственно, следующие величины:

$4\pi\rho_m$, ρ_m – плотность магнитных зарядов и

$\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m$, j_m – плотность магнитных токов.

Такое смелое предположение в 1931 г. и сделал П. Дирак, который высказал: “Было бы удивительно, если бы природа не использовала эту возможность”, а позже развил идею о существовании магнитного монополя (единичного магнитного полюса). Логических возражений против такой гипотезы нет, т.е. классическая физика допускает существование таких частиц. Однако сохраняется неясность: многие уравнения получаются из вариационных принципов, но до сих пор не придумано и не сформулировано такого вариационного принципа, в котором бы наряду с системой уравнений Максвелла появлялись бы электрический и магнитный заряды одновременно и равноправно. Возможно, что отсюда следует запрет на существование магнитных зарядов. Кроме того, многочисленные попытки экспериментального обнаружения магнитных монополей пока к успеху не привели.

В квантовой механике имеем другую ситуацию. Там монополь возникает как некоторая сингулярность в теории электромагнитного поля. Основной вывод Дирака: магнитный заряд магнитного монополя g должен быть связан с электрическим зарядом и квантован:

$$g = n\frac{\hbar c}{2e}, \tag{4.6.11}$$

где n – любое целое число. Эту связь можно получить многими способами, но везде нужно привлекать квантовую механику. Получим заряд монополя Дирака, используя мысленный эксперимент Эфингера (1969).

Рассмотрим конденсатор, в котором создано однородное электрическое поле (рис. 6.1). В таком поле магнитный монополь с зарядом g будет двигаться по круговой орбите, т.е. его поведение будет аналогично тому, как будет вести себя электрон, помещенный в однородное магнитное поле (диамагнетизм свободных электронов Ландау). Сила Лоренца, действующая со стороны электрического поля на монополь, равна

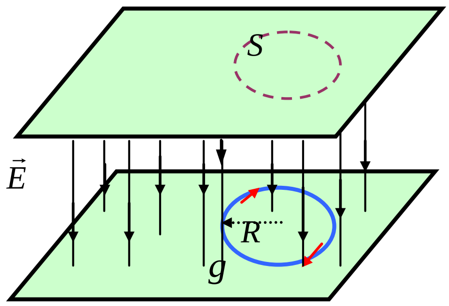

Рис. 6.1.

$$\vec{F}_E = \frac{g}{c}\left[\vec{v}, \vec{E}\right], \tag{4.6.12}$$

или $F_E = g\left|\vec{E}\right|\frac{v}{c}$ и будет сообщать ему центростремительное ускорение

$$F_E = M\frac{v^2}{R}, \tag{4.6.13}$$

где M, v и R – масса, скорость и радиус траектории монополя, соответственно. Из равенства (4.6.12) и (4.6.13) получаем:

$$\left|\vec{E}\right| = E = \frac{Mvc}{Rg} \tag{4.6.14}$$

Л.Д.Ландау показал, что орбитальное движение электронов в магнитном поле квантуется. Поэтому момент импульса электрического заряда в однородном магнитном поле относительно оси вращения может быть записан как

$$L_z = (2n+1)\hbar, \tag{4.6.15}$$

n = 0, 1, 2,…, где член с $n = 0$ описывает, так называемое, нулевое движение. Распространяя этот результат на орбитальное движение монополя в однородном электрическом поле, запишем

$$L_z = MvR = (2n+1)\hbar \tag{4.6.16}$$

Тогда напряженность электрического поля, в котором движется монополь, может быть выражена как

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\hbar c}{gR^2}(2n+1) = \frac{2\hbar c}{gR^2}\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{4.6.17}$$

С другой стороны, по теореме Гаусса поле в конденсаторе (см рис. 6.1):

$$E\cdot\pi R^2 = 4\pi\sigma\cdot\pi R^2, \qquad E = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q_{охв}}{\pi R^2} = \frac{4q_{охв}}{R^2}, \tag{4.6.18}$$

где $\sigma -$ поверхностная плотность зарядов на пластине конденсатора, $q_{охв} = \sigma\cdot\pi R^2 -$ заряд на пластине конденсатора, охватываемый проекцией орбиты магнитного монополя на плоскость пластины. Приравнивая (4.6.17) и (4.6.18), получаем

$$\frac{4q_{охв}}{R^2} = \frac{2\hbar c}{gR^2}\left(n+\frac{1}{2}\right), \text{ или } q_{охв} = \frac{\hbar c}{2g}\left(n+\frac{1}{2}\right). \qquad (4.6.19)$$

При $n=0$ остается конечный заряд, связанный с нулевым движением монополя (эффект физического вакуума). Вычитая эффект вакуума, получаем

$$q_{набл} = n\frac{\hbar c}{2g}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (4.6.20)$$

При $n=1$ получаем $e = \frac{\hbar c}{2g_{\min}}$ – наименьший электрический заряд, откуда $g_{\min} = \frac{\hbar c}{2e}$ или $g = n\frac{\hbar c}{2e}$, т.е. получаем условие квантования гипотетического магнитного заряда (4.6.11).

Условие квантования возникает из-за того, что частицы проявляют волновые свойства, вследствие чего появляются интерференционные эффекты в движении частиц одного типа под влиянием частиц другого типа. Если магнитный монополь с магнитным зарядом g существует, то формула

$$eg = \frac{1}{2}n\hbar c \qquad (4.6.21)$$

равносильна требованию, чтобы все заряженные частицы в окрестности монополя имели заряд e, равный целому кратному величины $\frac{\hbar c}{2g}$. Таким образом, электрические заряды должны быть квантованы. А именно кратность всех наблюдаемых зарядов заряду электрона является одним из фундаментальных законов природы. Поэтому, если бы существовал монополь Дирака, то этот закон имел бы естественное объяснение. Никакого другого объяснения квантования электрического заряда не известно.

Принимая, что e – заряд электрона, величина которого определяется соотношением $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ (α– постоянная тонкой структуры) и используя условие квантования, можно получить наименьший магнитный заряд, определяемый равенством $\frac{g^2}{\hbar c} = \frac{137}{4}$. Откуда $\frac{g^2}{e^2} = \left(\frac{137}{2}\right)^2$ и

$$g = \frac{137}{2}e = 68{,}5e, \qquad (4.6.22)$$

т.е. много больше заряда электрона.

Магнитный монополь – стабильная частица и не может исчезнуть, пока не встретится с другим монополем, имеющим равный по величине и противоположный по знаку магнитный заряд. Таким образом, монополи, если они существуют, должны, как и электроны с позитронами рождаться и аннигилировать парами: плюс - монополь и минус - монополь. Масса монополя $\sim 2{,}5m_p$.

Выводы Дирака.

1. Магнитный монополь, если он существует, вносит симметрию в уравнения для магнитных и электрических полей.
2. Нет физических законов, запрещающих существование магнитного монополя.
3. Имеет место взаимное квантование электрического и магнитного зарядов.

Как можно обнаружить монополь? Степень ионизации, производимой монополем, должна быть велика $(g = 68{,}5e)$, поэтому его трек в камере Вильсона или пузырьковой камере должен очень сильно выделяться на фоне треков других частиц. Однако поиски пока не дали результатов.

Существуют ограничения сверху, которые необходимо учитывать при попытках обнаружить магнитный монополь, например:

1. В составе космических лучей вплоть до энергий ~ $3\ 10^{19}$ *эВ* не обнаружена высокопроникающая компонента монополей.
2. Космическими лучами создаются не более 2^x монополей в секунду по всей поверхности Земли.

Примечание 1. *Поль Андриен Морис Дирак, английский физик-теоретик, 1902–1984*
