## 4.7. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля.

4.7.1. Зависимые от времени потенциалы.

Записав систему уравнений Максвелла, теперь следует найти способ их решения. Для стационарного электромагнитного поля эта задача существенно облегчается введением вспомогательных величин – потенциалов $\varphi$ и $\vec{A}$. Оказывается, что, видоизменив надлежащим образом определение скалярного и векторного потенциалов, можно воспользоваться ими и для решения уравнений Максвелла в общем случае переменного электромагнитного поля.

Будем считать, что диэлектрическая $\varepsilon$ и магнитная $\mu$ проницаемости одинаковы на всем протяжении поля и поверхностных зарядов и токов в поле нет. При этих условиях векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и их первые производные всюду остаются непрерывными, что существенно упрощает решение поставленной задачи. Полученные далее результаты могут быть легко обобщены на случай наличия скачкообразного изменения $\varepsilon$ и $\mu$ на отдельных поверхностях раздела различных сред, в то время как задача решения уравнений Максвелла при произвольной зависимости $\varepsilon$ и $\mu$ от координат точки чрезвычайно усложняется.

Ранее в электростатике ввели скалярный потенциал $\varphi$. При этом электрическое поле $\vec{E}$ было потенциально ( $rot\vec{E}=0$ ) и определялось из равенства

$$\vec{E}=-\nabla\varphi \tag{4.7.1}$$

Но теперь в переменных во времени полях появилась не потенциальная часть электрического поля:

$$rot\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{c\partial t}. \tag{4.7.2}$$

Поскольку магнитных зарядов нет, то, как и ранее, имеем $div\vec{B}=0$ и, как и ранее, можно ввести векторный потенциал $\vec{A}$ (см Глава 2, §7):

$$\vec{B}=rot\vec{A}. \tag{4.7.3}$$

Поскольку теперь мы рассматриваем электрическое и магнитное поля зависящими от времени, то, следовательно, и потенциалы скалярный $\varphi(\vec{r},t)$ и векторный $\vec{A}(\vec{r},t)$ также зависят от времени и координат. Подставим (4.7.3) в (4.7.2):

$$rot\vec{E}=-\frac{\partial}{c\partial t}rot\vec{A}=-\frac{1}{c}rot\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \tag{4.7.4}$$

Т.е. можно записать, что

$$rot\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{c\partial t}\right)=0, \tag{4.7.5}$$

т.е. вектор в круглых скобках является *потенциальным вектором*. И именно этот вектор можно представить в виде градиента от скалярного потенциала $\varphi(\vec{r},t)$:

$$\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi \tag{4.7.6}$$

Итак, в случае *переменных полей электрическое поле выражается через векторный и скалярный потенциалы*:

$$\vec{E}(t,\vec{r})=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}-\nabla\varphi(t,\vec{r}) \tag{4.7.7}$$

Первое слагаемое в (4.7.7) определяет электрическое поле от электромагнитной индукции, второе – от зарядов. *Магнитное поле определяется по-прежнему*:

$$\vec{B}(t,\vec{r})=rot\vec{A}(t,\vec{r}). \tag{4.7.8}$$

Как и в случае стационарных полей потенциалы $\varphi(\vec{r},t)$ и $\vec{A}(\vec{r},t)$ определены неоднозначно, т.е. одно и то же электромагнитное поле может быть представлено различными потенциалами. Это связано с тем, что скалярный и векторный потенциалы поля являются лишь вспомогательными функциями, а непосредственный физический смысл имеют только напряженность $\vec{E}$ электрического и индукция $\vec{B}$ магнитного полей. Именно эти характеристики поля однозначно определяют энергию поля, силы, действующие со стороны поля на заряженные частицы, плотность токов и т.д. Поэтому любые два поля, описываемые одними и теми же значениями $\vec{E}$ и $\vec{B}$, но разными значениями потенциалов $\varphi$ и $\vec{A}$, физически тождественны. Неоднозначность потенциалов позволяет производить *калибровочное преобразование*. В самом деле, имеем:

$$\begin{cases} \vec{B} = rot\vec{A} \\ \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \end{cases} \tag{4.7.9}$$

Пусть имеется произвольная функция $\chi(\vec{r},t)$. Тогда легко увидеть, что новые потенциалы, определенные как

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + grad\chi \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases} \tag{4.7.10}$$

опять описывают те же магнитное и электрическое поля. В самом деле, имеем:

$$\vec{B}' = rot\vec{A}' = rot\vec{A} + rot(grad\chi) = rot\vec{A} = \vec{B},$$

так как $rot(grad\chi) = [\nabla,\nabla\chi] \equiv 0$, и

$$\vec{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{\partial}{c\partial t}\nabla\chi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}.$$

Преобразования (4.7.10) называются *калибровочными преобразованиями*. Инвариантность поля по отношению к этому классу преобразований потенциалов называется *калибровочной* или *градиентной инвариантностью*. Требование калибровочной инвариантности уравнений теоретической физики, т.е. требование, чтобы физическое содержание этих уравнений зависело только от напряженности и индукции электромагнитного поля и оставалось неизменным при всех преобразованиях потенциалов поля, играет важную роль в физических теориях. Решение отдельных конкретных задач часто облегчается специальной, целесообразной для данной задачи, калибровкой потенциалов.

4.7.2. Уравнения для потенциалов.

Получим дифференциальные уравнения для зависящих от времени потенциалов электромагнитного поля. Пусть для простоты *рассматриваем изотропную среду*

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E},$$
$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

и $\varepsilon,\mu = const$ на всем протяжении поля. Тогда перепишем уравнение системы в виде:

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

или, умножая на магнитную проницаемость, имеем:

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{4.7.11}$$

Подставим выражения $\vec{B} = rot\vec{A}$ и $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ в последнее уравнение (4.7.11):

$$rot(rot\vec{A}) = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right);$$

Из векторной алгебры известно соотношение: $rot(rot\vec{A}) \equiv [\nabla,[\nabla,\vec{A}]] = grad(div\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$ (напомним, двойное векторное произведение раскладывается по правилу БАЦ–ЦАБ $[\nabla[\nabla,\vec{A}]] = \nabla(\nabla,\vec{A}) - (\nabla,\nabla)\vec{A}$). Тогда получаем:

$$grad(div\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} - \vec{\nabla}\left(\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2},$$

или далее

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}+grad\left(div\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{4.7.12}$$

Воспользовавшись неоднозначностью определения потенциалов $\varphi$ и $\vec{A}$, можем наложить некоторое условие, определяющее их взаимосвязь, в частности, так называемое, условие – *калибровка* Лоренца:

$$div\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \tag{4.7.13}$$

Иначе говоря, мы можем выбрать такие калибровочные преобразования, т.е. такие $\chi(\vec{r},t)$, чтобы выполнялось (4.7.13). Тогда уравнение для векторного потенциала $\vec{A}$ в калибровке Лоренца приобретает вид:

$$\Delta\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \tag{4.7.14}$$

Это уравнение носит название *уравнения Даламбера*. Заметим, что в случае стационарных, не зависящих от времени полей, $\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$ и мы приходим к уравнению (3.7.12) – к уравнениям Пуассона для компонент векторного потенциала.

Вводя условие Лоренца (4.7.13), которое упрощает запись уравнения для векторного потенциала, это условие должно сохраняться при калибровочных преобразованиях. Мы, таким образом, накладываем ограничения на вид скалярной функции $\chi(t,\vec{r})$, исходя из следующего равенства:

$$div\vec{A}'+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}=div\left(\vec{A}+grad\chi\right)+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)=div\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\Delta\chi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right).$$

Итак, условие Лоренца оказывается инвариантным лишь при калибровочных преобразованиях с функцией $\chi$, удовлетворяющей уравнению:

$$\Delta\chi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0. \tag{4.7.15}$$

Воспользовавшись уравнением Максвелла $div\vec{D}=4\pi\rho$, найдем теперь дифференциальное уравнение для скалярного потенциала $\varphi$.

$$div\vec{E}=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

$$div\left(-\vec{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

или далее

$$-\Delta\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{A}=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Из условия Лоренца (4.7.13) выражаем дивергенцию векторного потенциала $div\vec{A}=-\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и подставляем в последнее уравнение, тогда получаем:

$$-\Delta\varphi+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

или окончательно имеем:

$$\Delta\varphi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{4.7.16}$$

Таким образом, мы получили дифференциальные уравнения для определения векторного (4.7.14) и скалярного (4.7.16) потенциалов. Полученные уравнения носят название *уравнений Даламбера*. Эти уравнения вместе с *условием Лоренца* позволяют определить значения потенциалов электромагнитного поля по заданному распределению зарядов и токов проводимости. Зная $\varphi$ и $\vec{A}$, можно с помощью уравнений $\vec{B} = rot\vec{A}$ и $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ найти векторы $\vec{B}$ и $\vec{E}$.

Отметим, что хотя скалярный потенциал $\varphi$, как и в случае стационарных полей, зависит лишь от распределения зарядов, а векторный $\vec{A}$ – от распределения токов проводимости, напряженность же электрического поля зависит не только от градиента скалярного потенциала, но и от производной по времени векторного потенциала. В этом обстоятельстве проявляется закон электромагнитной индукции.

Для стационарного поля все производные по времени обращаются в нуль, и все уравнения, как и следовало ожидать, сводятся к полученным ранее в параграфе 3.7 уравнениям, описывающим стационарное поле.

Пока остается открытым вопрос о физическом смысле коэффициента $\frac{\varepsilon\mu}{c^2}$. Ответ на него мы получим в следующем параграфе.