4.8. Волновое уравнение.

4.8.1. Волновое уравнение.

Рассмотрим непроводящую, изотропную и однородную среду, характеризуемую диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Пусть в этой среде отсутствуют свободные заряды и токи проводимости, т.е. $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$. Тогда, если в рассматриваемой области нет ферромагнетиков, имеем:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \tag{4.8.1}$$

Тогда система уравнений Максвелла (4.6.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} rot\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad & rot\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \\ div\vec{D} &= 0, & div\vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{4.8.2}$$

Продифференцируем первое уравнение из (4.8.2) по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H} = rot\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \tag{4.8.3}$$

Применяя операцию rot ко второму уравнению (4.8.2) и подставляя результат (4.8.3), полученный из первого уравнения, находим:

$$rot\left(rot\vec{E}\right) = -\frac{\mu}{c} rot\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Из векторного анализа вспомним правило БАЦ-ЦАБ, тогда имеем

$$rot\left(rot\vec{E}\right) = \left[\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} = grad\left(\cancelto{0}{div\vec{E}}\right) - \Delta\vec{E},$$

где оператор Лапласа равен как обычно

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

И так как $grad\left(div\vec{E}\right) = 0$ из-за условия $div\vec{D} = 0$, получаем:

$$rot\left(rot\vec{E}\right) = -\Delta\vec{E} \tag{4.8.4}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{4.8.5}$$

Аналогично для $\vec{H}$ или $\vec{B}$ получаем:

$$\Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{4.8.6}$$

С такими уравнениями мы с вами встречались при изучении распространения колебаний в курсе классической механики (параграф 4.7, уравнение (4.7.14)). В общем случае уравнение вида

$$\Delta\Phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{4.8.7}$$

называется *волновым уравнением*. Здесь в качестве функции $\Phi = \Phi\left(\vec{r}, t\right)$ могут быть функции векторных полей $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}$ и их проекций.

Рассмотрим одномерный случай, когда процесс распространения происходит вдоль оси x. Тогда уравнение (4.8.7) запишется:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0. \tag{4.8.8}$$

Решением этого уравнения является функция вида

$$\Phi=\Phi\left(t\pm\frac{x}{v}\right). \tag{4.8.9}$$

Это легко проверить, если вычислим производные от (4.8.9) по координате:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\pm\frac{1}{v}\Phi';\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\Phi''$$

и по времени:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\Phi';\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\Phi''.$$

В самом деле, подставляя эти производные в волновое уравнение (4.8.8), получаем равенство нулю левой части уравнения. Смысл приведенного решения (4.8.9) прост: оно описывает распространяющееся возмущение (т.е. значение функции Φ в одной точке) или бегущую волну. Функция $\Phi=\Phi\left(t-x/v\right)$ представляет уравнение волны, распространяющейся вдоль оси x со скоростью v. Функция $\Phi=\Phi\left(t+x/v\right)$ описывает волну, распространяющуюся против оси x со скоростью v. Действительно, следующее равенство, определяющее постоянное значение функции Φ

$$t-\frac{x}{v}=t+\Delta t-\frac{x+\Delta x}{v} \tag{4.8.10}$$

выполняется, если

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v}, \text{ или } v=\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

т.е. v имеет смысл скорости, т.е. скорости распространения постоянного значения функции Φ.

При фиксированных значениях x и t значение функции $\Phi=\Phi\left(t\pm x/v\right)$ постоянно на всей плоскости, перпендикулярной x. Поэтому такие волны называются *плоскими*. Аргумент функции Φ, т.е. $\varphi(x,t)=t-x/v$, называется *фазой волны*. Уравнение поверхности постоянной фазы, иначе *волновой поверхности*, имеет вид:

$$t-\frac{x}{v}=const. \tag{4.8.11}$$

Дифференцируем это уравнение по времени: $1-\frac{1}{v}\frac{dx}{dt}=0$, получаем *фазовую скорость*:

$$v=\frac{dx}{dt} \tag{4.8.12}$$

Фазовая скорость – это скорость, с которой поверхность с фиксированным значением фазы (волновая поверхность) перемещается вдоль оси x.

Возвращаясь к уравнениям для потенциалов электромагнитного поля (см §4.7) и уравнениям для векторов электромагнитного поля (4.8.5) - (4.8.6), находим, что

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}=\frac{1}{v^2}.$$

Таким образом, электромагнитное поле распространяется от места возбуждения с конечной скоростью, определяемой соотношением:

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{4.8.13}$$

Скорость распространения электромагнитных волн (скорость света) в вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) равна коэффициенту, введенному в системе единиц Гаусса:

$$v_{вакуум} = c \tag{4.8.14}$$

Отметим, что скорость света в среде меньше, чем в вакууме, т.к. произведение $\varepsilon\mu \geq 1$.

Примечание 1, В системе *СИ* скорость света в вакууме $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, а в среде $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}}$.

Резюмируя сказанное, отметим, *что из уравнений Максвелла следует вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно, т.е. отдельно от электрических зарядов и токов. Изменение состояния электромагнитного поля носит волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами.*