Лабораторная работа № 1.18
ИССЛЕДОВАНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы

Исследование колебаний крутильного маятника с телами различной формы.

Задачи

1. Измерить период колебаний крутильного маятника с телами различной формы.
2. Определить угловую жесткость пружины крутильного маятника.
3. Определить моменты инерции исследованных тел.

Введение

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси описывается основным законом динамики вращательного движения

$$I\beta = M, \tag{1}$$

где M – момент сил относительно оси вращения, I – момент инерции тела относительно той же оси и $\beta = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ – угловое ускорение.

Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси можно найти суммированием моментов инерции его малых частей:

$$I = \int\limits_m r^2 dm = \int\limits_V r^2 \rho dV \ ,$$

где ρ – плотность тела, а $dm = \rho dV$ – масса малого элемента тела объемом dV, расположенного на расстоянии r от оси вращения. Момент инерции тела зависит от плотности, формы и размеров тела, а также от положения тела относительно оси вращения.

В лабораторной установке вращение тела происходит под действием спиральной пружины (рис.1). При повороте тела вокруг оси пружина деформируется и возникает момент сил упругости M, стремящийся вернуть тело в положение равновесия. В первом приближении можно считать, что этот момент пропорционален углу поворота φ и направлен в противоположную сторону:

$$M = -f \cdot \varphi, \tag{2}$$

где f – постоянная величина для данной спиральной пружины, называемая *угловой жесткостью*. Угловая жесткость зависит от материала и формы пружины.

Рис.1. Спиральная пружина

С учетом (2) уравнение вращательного движения (1) переходит в

$$-f \cdot \varphi = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0\ , \tag{3}$$

где $\omega^2 = f/I$.

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний, его решение

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

описывает гармонические крутильные колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}\,. \tag{4}$$

Уравнение (4) позволяет по экспериментальным значениям периода крутильных колебаний рассчитать момент инерции исследуемого тела или угловую жёсткость пружины.

В первой части работы уравнение (4) используется для измерения угловой жесткости пружины f. Для этого на пружину устанавливается горизонтальная штанга с двумя грузами, которые могут перемещаться вдоль нее. Момент инерции такой системы равен сумме моментов инерции штанги I_0 и моментов инерции грузов I_1 и I_2 относительно оси вращения. Моменты инерции грузов могут быть вычислены по теореме Штейнера

$$I_1 = I_C + ml_1^2 \qquad \text{и} \qquad I_2 = I_C + ml_2^2,$$

где l_1 и l_2 – расстояния от центров грузов до оси вращения, m – масса груза, а I_C – его момент инерции относительно центральной оси. Таким образом, полный момент инерции крутильного маятника равен

$$I = m(l_1^2 + l_2^2) + 2I_C + I_0\,. \tag{5}$$

Возводя уравнение для периода (4) в квадрат и подставляя момент инерции из (5), получаем

$$T^2 = 4\pi^2\frac{I}{f} = \frac{4\pi^2 m}{f}(l_1^2 + l_2^2) + \frac{4\pi^2 m}{f}(2I_C + I_0) = a(l_1^2 + l_2^2) + b \tag{6}$$

Из (6) следует, что квадрат периода T^2 линейно зависит от суммы квадратов расстояний грузов до оси вращения $\left(l_1^2 + l_2^2\right)$, а угловой коэффициент этой зависимости равен

$$a = \frac{4\pi^2 m}{f}.$$

Проведя измерения периода крутильных колебаний для различных положений грузов, можно определить a и найти угловую жесткость пружины f

$$f = \frac{4\pi^2 m}{a} \qquad (7)$$

Во второй части работы формула (4) используется для определения моментов инерции тел различной формы. Тело устанавливается на крутильный маятник и измеряется период его колебаний. Используя найденную ранее угловую жесткость пружины, можно вычислить момент инерции тела

$$I = \frac{T^2 f}{4\pi^2}. \qquad (8)$$

Экспериментальная установка

В лабораторной работе измеряются моменты инерции нескольких тел. Их параметры, а также масса грузов, с помощью которых определяется угловая жесткость пружины, приведены в таблице

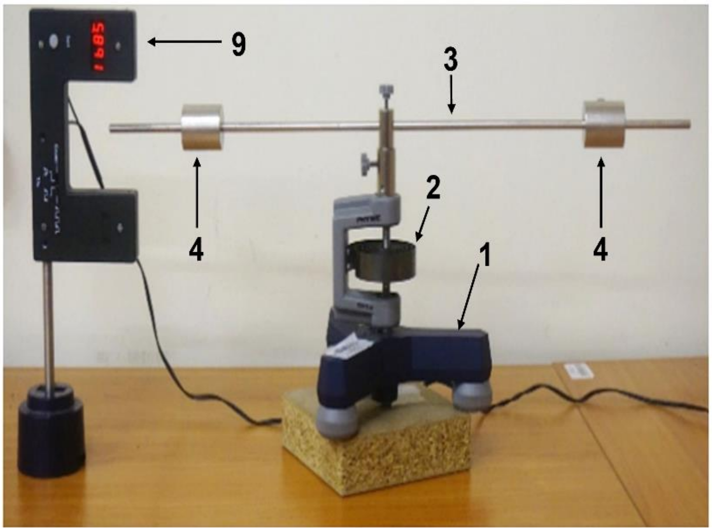
Параметры тел, используемых в работе

шар	m = 0,595 кг	D = 0,135 м
диск	m = 0,276 кг	D = 0,217 м
полый цилиндр	m = 0,350 кг	D_1 = 0,092 м, D = 0,100 м
сплошной цилиндр	m = 0,346 кг	D = 0,099 м
стержень	m = 0,175 кг	l = 0,600 м
грузы	$m_1 = m_2$ = 0,213 кг	

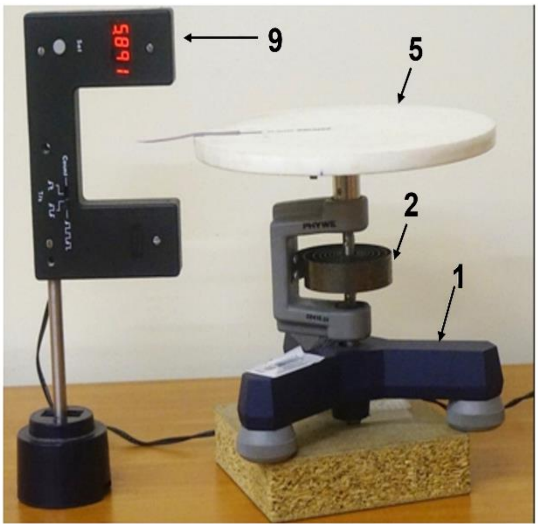
Погрешность измерения массы Δm = 0,001 кг.

Погрешность измерения диаметров ΔD = 0,001 м.

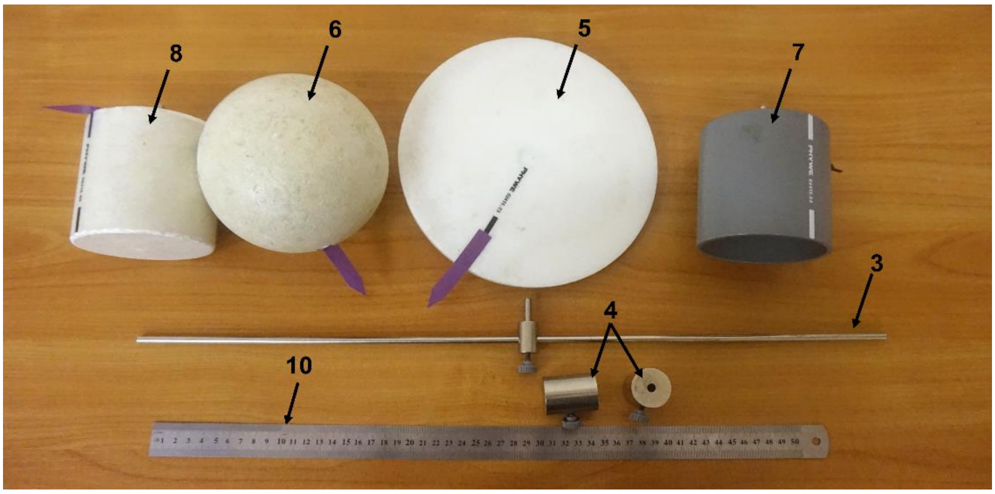
Устройство экспериментальной установки показано на рисунке 2.



(а)



(б)



(в)

Рис.2. Общий вид экспериментальной установки:
крутильный маятник с укреплённой штангой (а) и с диском (б);
принадлежности к лабораторной работе (в).

Установка содержит треногу 1 со спиральной пружиной 2, к которой могут быть прикреплены тела различной формы: штанга 3 с двумя грузами 4 (рис.2а), диск 5 (рис.2б), а также шар 6, полый и сплошной цилиндры 7,8, имеющиеся в комплекте (рис. 2в). Для измерения периода колебаний используют электронный секундомер со световым барьером 9. Линейка 10 служит для измерения расстояний.

Порядок проведения эксперимента

Опыт 1. Определение угловой жёсткости пружины

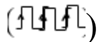
1. Установите на крутильный маятник штангу с двумя грузами так, как изображено на рисунке 2а. В положении равновесия конец штанги должен находиться на световом барьере.
2. Включите питание секундомера со световым барьером. Установите переключатель барьера в нижнее положение ().
3. Зафиксируйте грузы на расстоянии 5-8 см от оси вращения.
4. Измерьте линейкой расстояния l_1 и l_2 от центров грузов до оси вращения, запишите результаты в таблицу 1.

Таблица 1. Измерение периода колебаний штанги с грузами

l_1, м	l_2, м	T_1, с	T_2, с	T_3, с	$\langle T\rangle$, с	$X=l_1^2+l_2^2$, м^2	$Y=\langle T\rangle^2$, с^2

5. Поверните штангу на угол, примерно равный 90°, нажмите кнопку «Set» на электронном секундомере и отпустите маятник. После завершения одного периода колебаний секундомер покажет его длительность; занесите результат измерения T_1 в таблицу 1.
6. Повторите измерения периода (п.5) еще дважды (T_2 и T_3), каждый раз отклоняя штангу на тот же начальный угол.

При скручивании пружины её угловая жёсткость немного увеличивается, поэтому период колебаний зависит от их амплитуды. Измерения с фиксированным начальным углом позволяют исключить этот фактор и уменьшить погрешность результатов.

7. Повторите измерения пп.4-6 для 8-10 различных положений грузов, каждый раз последовательно отодвигая грузы к краям штанги на 1-2 см.

Опыт 2. Определения моментов инерции тел различной формы

1. Снимите штангу с грузами и установите на крутильный маятник диск так, чтобы в положении равновесия флажок находился на световом барьере (рис.2б).
2. Выполните трехкратное измерение периода крутильных колебаний, как описано в п.5 опыта 1. Результаты занесите в таблицу 2.
3. Проведите аналогичные измерения для шара, полого или сплошного цилиндра.

Таблица 2. Измерение периода колебаний тел различной формы

	T_1, с	T_2, с	T_3, с	$\langle T\rangle$, с	ΔT, с
Диск					
Шар					
Цилиндр					

Обработка результатов

Опыт 1

1. Вычислите $X=l_1^2+ l_2^2$ и $Y=\langle T\rangle^2$ и занесите в таблицу 1.
2. Постройте график $Y(X)$, убедитесь, что зависимость имеет линейный характер $Y = aX+b$.
3. Методом парных точек определите угловой коэффициент a; используйте для вычислений таблицу 3

Таблица 3. Определение углового коэффициента a зависимости квадрата периода от суммы квадратов расстояний грузов до оси методом парных точек

Пары точек *i-j*	X_i, м^2	X_j, м^2	Y_i, с^2	Y_j, с^2	$a = \dfrac{\Delta Y_{ij}}{\Delta X_{ij}}$, с^2/м^2	$a - \langle a \rangle$, с^2/м^2	$(a - \langle a \rangle)^2$, (с^2/м^2)^2
					$\langle a \rangle =$		$\sum(a - \langle a \rangle)^2 =$

4. Вычислите среднее значение, среднеквадратичное отклонение и случайную погрешность углового коэффициента Δa.
5. По формуле (7) найдите угловую жесткость пружины.
6. Определите погрешность угловой жёсткости

$$\Delta f = f\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2},$$

где Δm – погрешность массы груза на штанге.

Опыт 2

1. Заполните последние столбцы таблицы 2, вычисляя среднее значение и погрешность периода крутильных колебаний исследованных тел ΔT.
2. По формуле (8) вычислите моменты инерции исследованных тел.
3. Определите погрешности вычисления моментов инерции

$$\Delta I = I\sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2}.$$

4. Используя данные из Приложения, рассчитайте теоретические значения

моментов инерции исследованных тел. Сравните теоретические и экспериментальные значения.

Контрольные вопросы

1. Почему момент инерции сплошного цилиндра меньше момента инерции трубы такой же массы и такого же радиуса?
2. В каких единицах в данной работе измеряется угловая жесткость пружины?
3. На крутильный маятник устанавливают штангу (стержень) без грузов. В первом случае ось вращения проходит через ее середину, во втором – через один из концов. Во сколько раз будут отличаться периоды крутильных колебаний?

Литература

1. Детлаф, А. А. Курс физики: учебное пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. 9-е изд., стер. М.: Академия, 2014. 719с.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 томах / И. В. Савельев. — 17-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2021 — Том 1: Механика. Молекулярная физика — 2020. — 436 с.
3. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: учебное пособие для физических специальностей вузов: [в 5 томах] / Д. В. Сивухин. Изд. 6-е, стер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014-2019. Т. 1: Механика. 2019. 560 с.
4. Иванов, В. К. Физика. Механика. Колебания: учеб. пособие/ В. К. Иванов. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 224 с.
5. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных: методические указания / Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Кафедра экспериментальной физики; составители: Б. Д. Агапьев, В. В. Козловский. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012.

Приложение.

Моменты инерции некоторых тел

Тело	Момент инерции
Материальная точка массой *m* на расстоянии *r* от оси вращения	$I = mr^2$
Однородный тонкий стержень массой *m*, длиной *l* относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно его длине	$I = \frac{1}{12}ml^2$
Однородный тонкий стержень массой *m*, длиной *l* относительно оси, проходящей через конец стержня, перпендикулярно его длине	$I = \frac{1}{3}ml^2$
Кольцо или труба с тонкими стенками радиусом *R* и массой *m*. Ось вращения проходит через центр кольца перпендикулярно плоскости кольца или совпадает с осью трубы	$I = mR^2$
Круглый сплошной диск (цилиндр) радиусом *R* и массой *m* относительно оси, проходящей через центр диска (цилиндра) перпендикулярно основанию.	$I = \frac{1}{2}mR^2$
Полый цилиндр относительно оси, проходящей через центр цилиндра перпендикулярно основанию.	$I = \frac{1}{2}m\left(R_{вн}^2 + R_{внеш}^2\right)$
Однородный шар радиусом *R* и массой *m* относительно оси, проходящей через центр шара	$I = \frac{2}{5}mR^2$

Дополнение

В п.6 раздела «Порядок проведения эксперимента» было отмечено, что для использованной в работе пружины уравнение $M = -f \cdot \varphi$ выполняется лишь приблизительно. Покажем, что методика измерений с колебаниями постоянной амплитуды позволяет получить правильное значение момента инерции и в этом случае.

Кинетическая энергия вращающегося тела равна $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$, а потенциальная энергия деформации пружины $E_p(\varphi) = \int\limits_{\phi}^{0} M(\varphi) d\varphi$.

Если затухание колебаний мало, то в течение нескольких периодов будет выполняться закон сохранения энергии

$$\frac{I\omega^2}{2} + E_p(\varphi) = E_0,$$

и, следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{2(E_0 - E_p(\varphi))}{I}}.$$

Период колебаний можно найти, вычисляя время поворота груза из положения равновесия в крайнее (амплитудное) положение

$$T = 4\int\limits_0^{\varphi_0} dt = 4\int\limits_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\omega} = \sqrt{I}\int\limits_0^{\varphi_0} \frac{4d\varphi}{\sqrt{2(E_0 - E_p(\varphi))}}.$$

Подынтегральное выражение зависит только от угла. Обозначив F его первообразную, получаем окончательное выражение

$$T = \sqrt{I}\,(F(\varphi_0) - F(0)).$$

Разность в скобках зависит только от амплитуды колебаний, следовательно, при фиксированной амплитуде квадрат периода колебаний строго пропорционален моменту инерции вращающегося тела, независимо от линейности упругих свойств пружины.