

## Лабораторная работа № 1.32

### МАЯТНИК ОБЕРБЕКА

#### Цель работы

Изучение основного закона динамики вращательного движения твердого тела и определение момента инерции маятника Обербека.

#### Задачи

1. Измерить время движения маятника с грузами разной массы.
2. Определить значение момента инерции маятника Обербека.

#### Введение

Основное уравнение динамики вращательного движения для симметричных тел, вращающихся вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии, имеет вид:

$$I\vec{\beta} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i, \quad (1)$$

где  $\sum_{i=1}^N \vec{M}_i$  – результирующий момент сил, действующих на тело,  $I$  – момент инерции,

$\vec{\beta}$  – угловое ускорение тела .

Результат действия силы при вращательном движении зависит не только от величины этой силы, но и от положения точки ее приложения. *Моментом силы* относительно некоторой точки называется векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$  точки приложения силы на вектор силы  $\vec{F}$  :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Вектор  $\vec{M}$  направлен перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , причем его направление связано с направлениями  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  *правилом правого винта*.

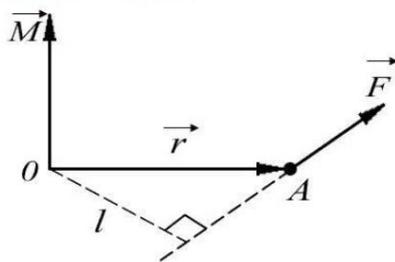


Рис.1. Вектор момента силы  $\vec{M}$

Модуль момента силы равен

$$M = Fr \sin \alpha = Fl,$$

где  $l$  – перпендикуляр, опущенный на линию действия силы, который называется *плечом силы*.

Если при поступательном движении мерой инертности тела является его масса, то при вращательном движении инертность тела зависит от распределения массы относительно оси вращения, и мерой инертности является *момент инерции* тела  $I$ . В общем случае момент инерции тела относительно оси вращения складывается из моментов инерции его малых частей  $dm$

$$I = \int_V R^2 dm,$$

где  $R$  – расстояние от элемента  $dm$  до оси вращения. Суммирование (интегрирование) ведется по всему объему тела.

Для экспериментальной проверки основного закона динамики вращательного движения в данной работе используется маятник Обербека (рис.2). Он представляет собой крестообразный маховик, на четырех стержнях которого закреплены передвигающиеся цилиндры – привески. На одной оси с крестовиной находится шкив, на который наматывается нить с привязанным на конце грузом. Нить перекинута через неподвижный лёгкий блок, изменяющий направление движения нити. Под действием падающего груза нить разматывается и приводит маховик в равноускоренное вращательное движение.

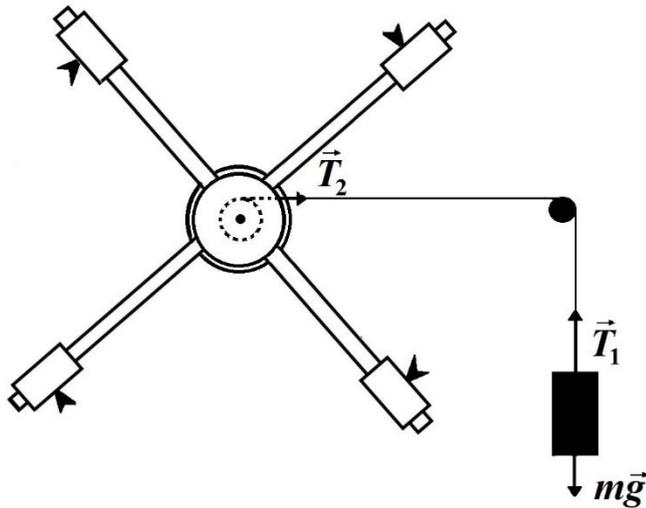


Рис.2. Маятник Обербека

Причиной поступательного движения груза массой  $m$  является действие на него силы тяжести  $m\vec{g}$ . Согласно II закону Ньютона:

$$ma = mg - T_1,$$

где  $T_1$  – сила натяжения нити, действующая на груз,  $a$  – ускорение груза.

$$T_1 = m(g - a). \quad (2)$$

Причиной вращательного движения крестовины маятника является действие на него момента  $M_T$  силы натяжения нити  $\vec{T}_2$ . Вращательному движению крестовины препятствует момент силы трения в подшипниках  $M_{mp}$ . Векторы  $\vec{M}_T$  и  $\vec{M}_{mp}$  имеют противоположное направление, поэтому уравнение (1) в проекции на ось вращения примет вид

$$I\beta = M_T - M_{mp},$$

$$\beta = \frac{1}{I}(M_T - M_{mp}) \quad (3)$$

Из (3) следует, что ускорение маятника  $\beta$  должно линейно зависеть от момента силы натяжения  $M_T$  при постоянстве остальных параметров. При этом наклон прямой  $\beta(M_T)$  будет зависеть от величины момента инерции вращающейся системы.

Из выражения (3) следует, что при  $\beta = 0$  имеет место равенство  $M_T = M_{mp}$ . Поэтому, продолжая на графике прямую линию зависимости  $\beta$  от  $M_T$  до пересечения с осью абсцисс (проводя экстраполяцию), можно найти момент сил трения  $M_{mp}$ .

Если пренебречь массой нити, моментом инерции блока и силами трения в нем, то силы реакции нити  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  равны по абсолютной величине:  $T_1 = T_2 = T$ . Тогда, с учётом уравнения (2) момент силы натяжения нити относительно оси вращения шкива радиуса  $R_{ш}$  равен

$$M_T = TR_{ш} = m(g - a)R_{ш} \approx mgR_{ш}, \quad (4)$$

так как в условиях эксперимента  $a \ll g$ . Изменяя массу груза  $m$ , можно изменять момент силы натяжения нити  $M_T$

Ускорение опускающегося груза можно определить из уравнения равноускоренного движения (груз опускается из состояния покоя), зная высоту  $h$  и время движения груза  $t$

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (5)$$

Нить нерастяжима и не скользит по шкиву маятника, поэтому тангенциальное ускорение точек на поверхности шкива и линейное ускорение груза равны. Тогда угловое ускорение маятника

$$\beta = \frac{a}{R_{ш}} = \frac{2h}{R_{ш}t^2}. \quad (6)$$

Момент инерции маятника Обербека можно представить в виде суммы

$$I = I_k + I_{п},$$

где  $I_k$  – момент инерции крестовины без привесков;  $I_{п}$  – суммарный момент инерции привесков.

Если привески имеют одинаковые массы  $m_{п}$  и закреплены на одинаковом расстоянии от оси, то суммарный момент инерции привесков может быть вычислен по теореме Штейнера.

$$I_n = 4I_c + 4m_{п}r_{п}^2$$

где  $I_c$  - момент инерции привеска относительно оси, проходящей через центр инерции,  $r_n$  - расстояние от центра привеска до оси вращения.

Таким образом, момент инерции маятника относительно оси вращения можно представить в виде

$$I = I_k + 4I_c + 4m_{\text{п}}r_{\text{п}}^2 = I_0 + 4m_{\text{п}}r_{\text{п}}^2. \quad (7)$$

Значение постоянной составляющей момента инерции системы  $I_0$  указано на лабораторной установке.

### Экспериментальная установка

Устройство экспериментальной установки показано на рисунке 3.

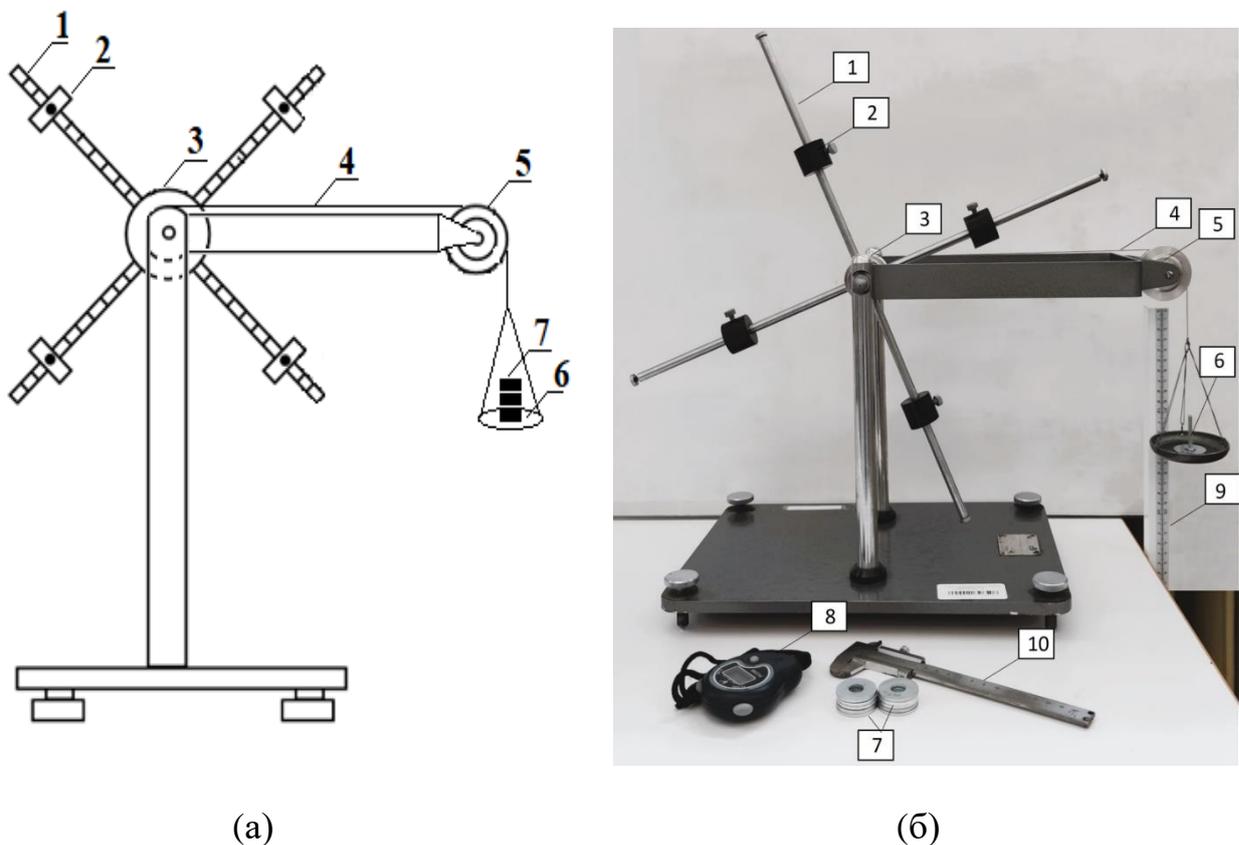


Рис. 3. Общий вид экспериментальной установки: а) схема, б) фотография.

1 – крестовина; 2 – передвижные привески; 3 – шкив; 4 – нить; 5 – блок; 6 – чаша для грузов;  
7 – грузы (стальные шайбы); 8 – секундомер; 9 – линейка, 10 – штангенциркуль.

На вертикальной стойке установлена вращающаяся крестовина 1, состоящая из четырех стержней, на которых закреплены передвижные привески 2. С крестовиной соединен шкив 3, на который наматывается нить 4. К нити через блок 5 подвешена чаша 6, в которую помещаются стальные шайбы 7. Для измерения времени движения груза используют электронный секундомер 8. Линейка 9 для измерения пути, пройденного грузами, закреплена вертикально. Для измерения геометрических размеров в комплекте лабораторного оборудования имеется также штангенциркуль 10.

### Параметры тел, используемых в работе

Радиус шкива	$R_{ш} = (17,0 \pm 0,5) \text{ мм}$
Масса цилиндра (привеска)	$m_{п} = (116,0 \pm 0,5) \text{ г}$
Масса чаши	$m_0 = (33,0 \pm 0,5) \text{ г}$
Масса шайбы	$m_{ш} = (11,0 \pm 0,1) \text{ г}$

### Порядок проведения эксперимента

1. Установите привески симметрично на указанное преподавателем расстояние от оси вращения и зафиксируйте их винтами.

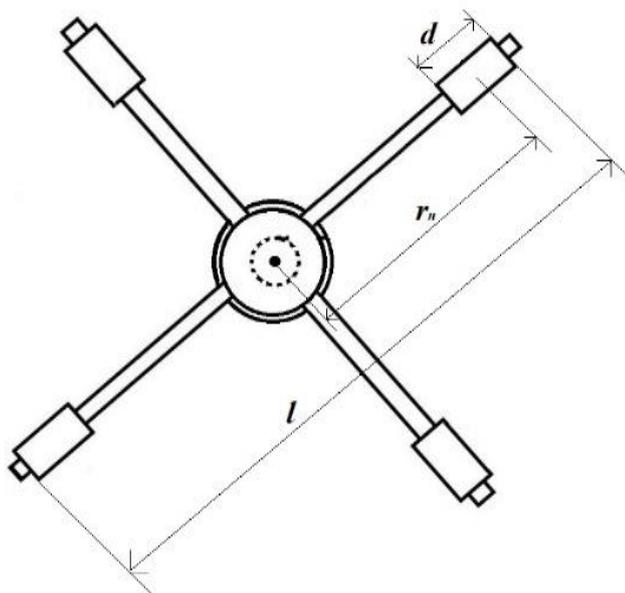


Рис. 4. Измерение расстояния  $r_n$  от оси вращения до центра привески.

2. Произведите балансировку маятника. Необходимо убедиться, что при ненатянутой нити любое положение маятника является положением безразличного равновесия. Если равновесие отсутствует, его можно добиться следующим образом. Располагают два стержня маятника горизонтально и слегка перемещают один из привесков, пока не наступит равновесие. Затем, повернув маятник на  $90^\circ$ , при необходимости повторяют аналогичную операцию.

3. Определите расстояние  $r_n$  от оси вращения до центра привеска. Для этого с помощью штангенциркуля удобно определить расстояние  $l$  между внешними торцами привесков, расположенных напротив друг друга (рис.4), и толщину привеска  $d$ . Тогда искомое расстояние

$$r_n = \frac{l - d}{2}.$$

4. Занесите в таблицу 1 значения радиуса шкива  $R_{ш}$ , расстояния  $r_n$ , массы привеска  $m_n$ , чаши  $m_0$  и шайбы  $m_{ш}$ , величину постоянной составляющей момента инерции системы  $I_0$ .

5. Поместите в чашу одну шайбу. Занесите в таблицу 1 массу груза  $m$  (суммарную массу чаши и шайбы).

6. Вращая крестовину против часовой стрелки, переведите груз в верхнее положение, соответствующее начальному значению координаты  $y_1$ . При этом нить должна быть намотана на шкив в один слой без самопересечений.

7. Минимизируйте колебания груза на нити.

8. Обнулите показания секундомера.

9. Отпустив груз, включите одновременно секундомер. Произведите отсчет времени опускания груза  $t$ , до нижнего положения, соответствующего координате  $y_2$ .

10. Результаты измерения времени  $t$  и пути  $h = y_2 - y_1$  занесите в таблицу 1.

11. Для уменьшения случайной погрешности проведите измерение времени опускания груза 3 раза.

12. Добавляя в чашу шайбы, произведите измерения времени опускания груза (по пп.4-10) для различных значений его массы (не менее 8 раз).

**Таблица 1.** Измерение времени движения грузов разной массы

$R_{ш} =$ , $r_{п} =$ , $m_{п} =$ , $m_0 =$ , $m_{ш} =$ , $I_0 =$ , $h =$							
№	$m$ , г	$t_1$ , с	$t_2$ , с	$t_3$ , с	$\langle t \rangle$ , с	$\beta$ , рад/с <sup>2</sup>	$M_T$ , Н·м
1							
2							
...							
8							

### Обработка результатов

1. Для каждой массы  $m$  рассчитайте значения  $M_T$ ,  $\beta$  по формулам (4) и (6), результаты занесите в таблицу 1.
2. По данным таблицы 1 постройте график зависимости  $\beta(M_T)$ . Убедитесь, что график представляет собой линейную зависимость.
3. Продолжая прямую до пересечения с осью  $M_T$ , оцените величину момента сил трения  $M_{тр}$ .
4. Методом парных точек определите момент инерции маятника Обербека. Параметры выбранных пар точек внесите в таблицу 2.

**Таблица 2.** Определение момента инерции методом парных точек

Пары точек $i-j$	$M_{Ti}$ , Н·м	$M_{Tj}$ , Н·м	$\beta_i$ , рад/с <sup>2</sup>	$\beta_j$ , рад/с <sup>2</sup>	$I_{ij} = \frac{\Delta M_{Tij}}{\Delta \beta_{ij}}$ , кг·м <sup>2</sup>	$(I_{ij} - \langle I \rangle)$ , кг·м <sup>2</sup>	$(I_{ij} - \langle I \rangle)^2$ , кг <sup>2</sup> ·м <sup>4</sup>
					$\langle I \rangle =$		$\sum (I_i - \langle I \rangle)^2 =$

5. Вычислите среднее значение, среднеквадратичное отклонение и случайную погрешность момента инерции.
6. Вычислите значение момента инерции с помощью соотношения (7) и оцените его погрешность, сравните с экспериментальным значением.

### Контрольные вопросы

1. Запишите основной закон динамики вращательного движения и дайте определения входящим в него физическим величинам.
2. Как направлены векторы угловой скорости и углового ускорения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
3. Как влияет величина момента инерции маятника на наклон графика зависимости  $\beta(M_T)$ ?
4. Как влияет сила трения на характер зависимости  $\beta(M_T)$ ?

### Литература

1. Савельев, И. В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 томах / И. В. Савельев. — 17-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2021 — Том 1: Механика. Молекулярная физика — 2020. — 436 с.
2. Иродов, И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. — М: Лаборатория знаний, 2014. — 309 с.
3. Иванов, В.К. Физика. Механика. Колебания: учеб. пособие/ В.К. Иванов. — СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. - 224 с.
4. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных: методические указания / Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Кафедра экспериментальной физики; составители: Б. Д. Агапьев, С. С. Козловский. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012