Лабораторная работа № 1.35

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы

Изучение метода крутильных колебаний на примере измерения главных моментов инерции прямоугольного параллелепипеда.

Задачи

1. Провести измерение периода крутильных колебаний пустой рамки и рамки с закрепленным в ней кубом.
2. Измерить периоды крутильных колебаний параллелепипеда, закрепленного относительно его главных осей.
3. Вычислить главные моменты инерции прямоугольного параллелепипеда.

Введение

Крутильный маятник представляет собой тело, которое может вращаться на упругом подвесе. Вращение твердого тела описывается основным законом динамики вращательного движения (уравнением моментов)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{M} \tag{1}$$

где $\vec{L}$ – момент импульса тела, $\overrightarrow{M}$ – момент сил, действующих на тело.

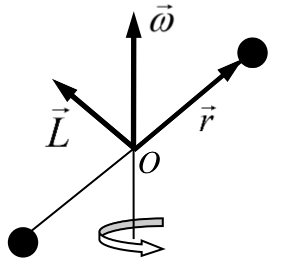


Рис. 1. Вращение тела вокруг произвольной оси.

Величина момента импульса твердого тела пропорциональна его угловой скорости ω, но для тела произвольной формы направление вектора момента импульса может не совпадать с направлением угловой скорости (рис. 1). Однако у любого твердого тела имеется три оси, проходящие через его центр инерции, при вращении вокруг которых направления векторов $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ совпадают. Эти оси называются *главными центральными осями инерции* или просто *главными осями* и обычно совпадают с осями симметрии тела. Для таких осей справедливо равенство

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \tag{2}$$

Момент инерции тела *I* является мерой инертности тела при вращательном движении, подобно тому, как масса тела является мерой инертности тела при поступательном движении. Момент инерции тела зависит от массы и её распределения относительно оси вращения.

Для сплошного тела момент инерции находят путем интегрирования:

$$I = \int_M r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV\ . \tag{3}$$

где ρ – плотность тела, а $dm = \rho dV$ – масса малого элемента тела объемом dV, расположенного на расстоянии r от оси вращения.

Если тело однородное (его плотность ρ не изменяется в пределах объема), то его момент инерции будет определяться только формой и полной массой тела:

$$I = \rho \int_V r^2 dV = \frac{m}{V} \int_V r^2 dV\ . \tag{4}$$

Вычисление моментов инерции однородных тел правильной геометрической формы относительно их осей симметрии не составляет большой сложности. Так, момент инерции прямоугольного параллелепипеда относительно главных осей (рис. 2), то есть осей симметрии, проходящих через середины противоположных сторон:

$$I_{nx} = \frac{m}{12}\left(l_y^2 + l_z^2\right),$$

$$I_{ny} = \frac{m}{12}\left(l_x^2 + l_z^2\right), \tag{5}$$

$$I_{nz} = \frac{m}{12}\left(l_x^2 + l_y^2\right),$$

где l_x, l_y, l_z – длины сторон параллелепипеда, параллельных соответствующим осям.

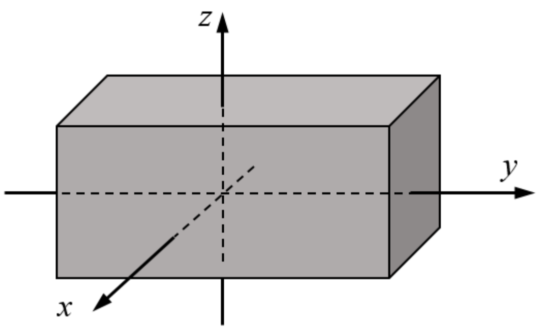


Рис. 2. Главные оси параллелепипеда

В частном случае куба, момент инерции относительно главных осей:

$$I_к = I_x = I_y = I_z = \frac{ma^2}{6}, \tag{6}$$

где a – длина ребра куба.

Расчет момента инерции твердого тела сложной формы представляет собой достаточно непростую задачу. Часто момент инерции определяется экспериментально различными способами, один из которых – метод крутильных колебаний.

Крутильные колебания совершает тело, подвешенное на вертикальной упругой проволоке и способное вращаться вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью проволоки. При повороте тела в горизонтальной плоскости на угол φ проволока закручивается, и возникает момент сил упругости M, стремящийся вернуть тело в положение равновесия. При небольших отклонениях от положения равновесия момент сил, действующих на рамку (в проекции на ось вращения), пропорционален углу закручивания проволоки:

$$M = -f\varphi, \tag{7}$$

где f – *крутильная жесткость*, зависящая от материала и геометрических размеров проволоки. Знак минус означает, что проекции углового смещения φ и момента силы F_τ на ось вращения имеют противоположные знаки.

Согласно основному закону динамики вращательного движения

$$I\beta = M, \tag{8}$$

где M – момент сил относительно оси вращения, I – момент инерции тела относительно той же оси и $\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – угловое ускорение.

С учетом (7) уравнение вращательного движения (8) переходит в

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -f\cdot\varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0\ , \tag{9}$$

где $\omega^2 = f/I$.

Решение дифференциального уравнения (9)

$$\varphi = \varphi_0\cos(\omega t + \alpha)$$

описывает гармонические крутильные колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}\ . \tag{10}$$

Уравнение (10) позволяет по экспериментальным значениям периода крутильных колебаний рассчитать момент инерции исследуемого тела.

В данной лабораторной работе крутильные колебания совершает прямоугольная рамка, центры противоположных сторон которой прикреплены к вертикально зафиксированным стальным проволокам. В рамке может быть закреплено тело таким образом, что ось проволоки проходит через центр масс тела и рамки (рис. 3).

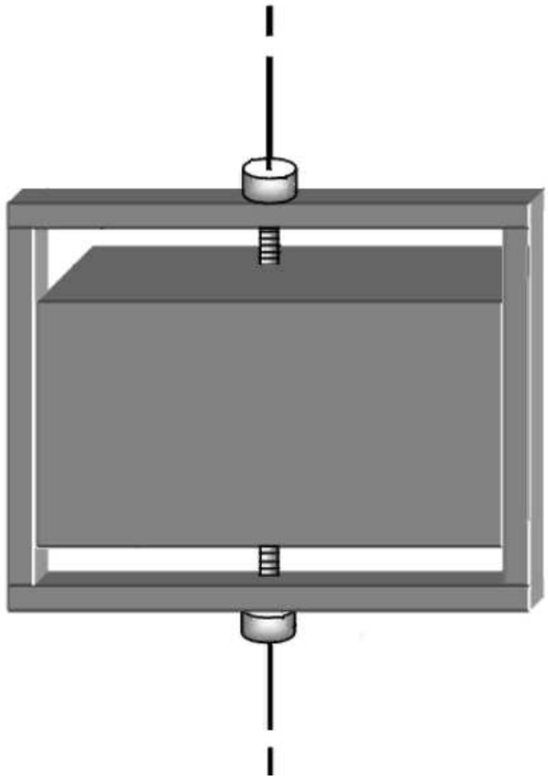


Рис. 3. Схематичное изображение подвижной части установки

В этом случае уравнение (10) примет вид:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_p + I_T}{f}}, \tag{11}$$

где $I_{\text{р}}$ – момент инерции рамки, $I_{\text{т}}$– момент инерции тела, закреплённого в рамке.

Одной из задач лабораторной работы является экспериментальное определение момента инерции параллелепипеда. Для того, чтобы исключить из (11) неизвестные крутильную жёсткость проволоки и момент инерции рамки, достаточно провести три серии измерений периода крутильных колебаний для разных систем:

1) Рамки с параллелепипедом; в этом случае период крутильных колебаний можно рассчитать по формуле:

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{I_p + I_n}{f}}, \tag{12}$$

где I_n – искомый момент инерции параллелепипеда.

2) Рамки без тела

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{I_p}{f}}\,. \tag{13}$$

3) Рамки с телом, момент инерции которого известен или легко рассчитывается, например, куба

$$T_к = 2\pi\sqrt{\frac{I_p + I_к}{f}}\,, \tag{14}$$

где $I_к$ – момент инерции куба.

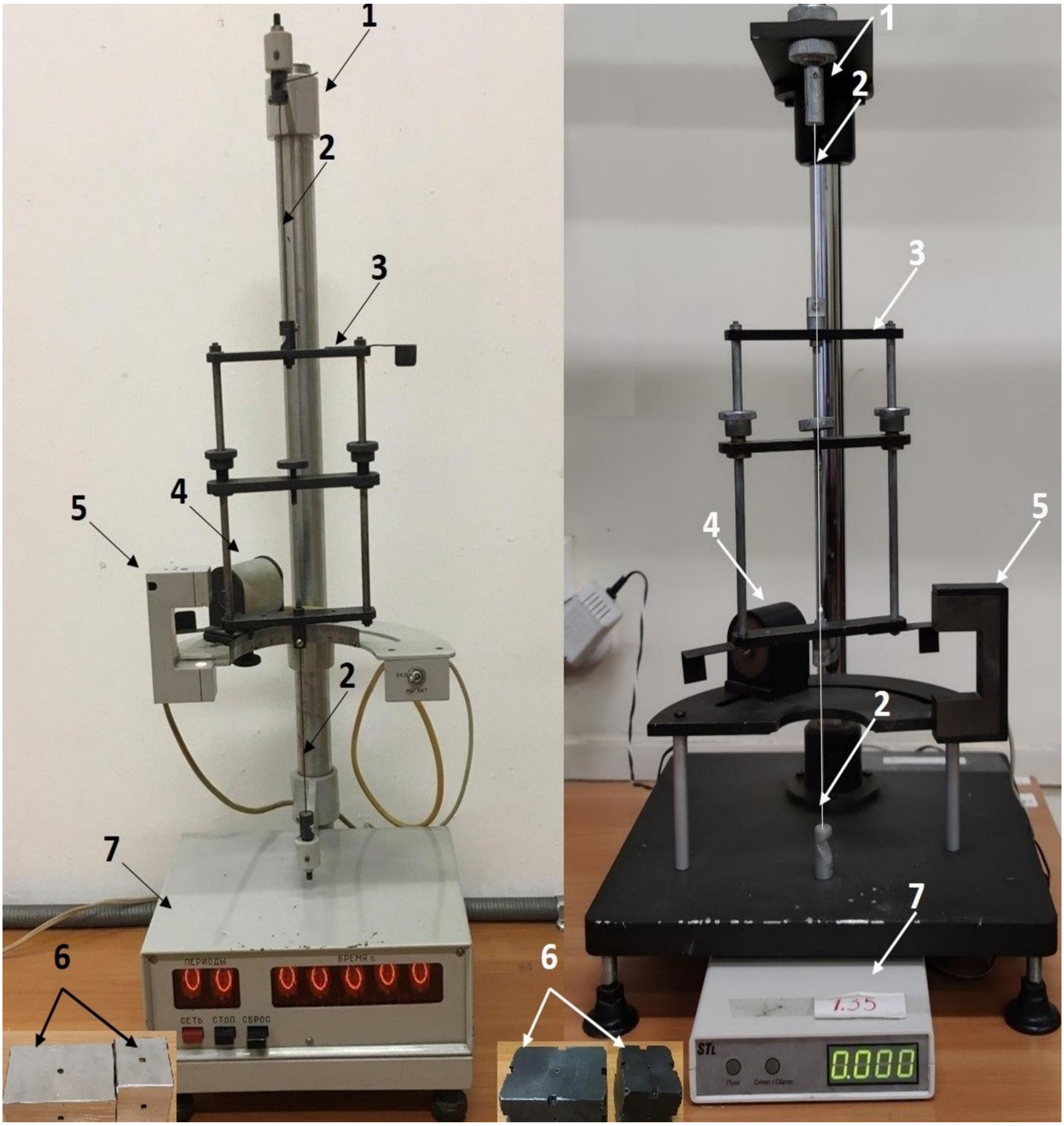
Исключив из уравнений (12)-(14) f и I_p, получим рабочую формулу для расчета момента инерции параллелепипеда относительно оси вращения рамки:

$$I_n = I_к\frac{T_n^2 - T_p^2}{T_к^2 - T_p^2}\,. \tag{15}$$

Экспериментальная установка

Установка (рис. 4) представляет собой вертикальную колонну 1, укрепленную на массивном основании. Между верхним и нижним кронштейнами колонны натянута стальная проволока 2, на которой подвешена рамка 3. На среднем кронштейне закреплена стальная пластина, являющаяся основанием для электромагнита 4, фотоэлектрического датчика 5 и отсчетной шкалы. Для измерения моментов инерции в работе предлагаются куб и параллелепипед 6, которые можно закреплять внутри рамки (рис. 5).

В процессе колебаний крутильного маятника стрела рамки прерывает световой поток. Подсчет периода колебаний производится с помощью электронного секундомера 7.



(а) (б)

Рис. 4. Общий вид экспериментальных установок (два варианта)

Рис. 5. Параллелепипед, закреплённый внутри рамки

Порядок проведения эксперимента

1. Включите установку в сеть (на индикаторах таймера должны высвечиваться «0»).

2. Поверните пустую рамку прибора, зафиксируйте стрелу на электромагните.

3. Нажмите клавишу «СБРОС», а затем «ПУСК».

4. Измерьте время t_p, за которое рамка совершает $n = 10$ полных колебаний. Для этого необходимо нажать кнопку «СТОП» в любой момент между n-*1* и n колебанием. Вычислите период колебаний как $T_p = t_p/n$ и занесите результат в таблицу 1.

При выполнении лабораторной работы на установке, показанной на рисунке 4б, блок управления работает по-другому. Секундомер необходимо останавливать нажатием кнопки «СТОП» самостоятельно по завершению n-го колебания.

Таблица 1. Измерения периодов колебаний рамки T_p, рамки с кубом $T_к$ и рамки с параллелепипедом T_{nx}, T_{ny}, T_{nz}

№	T_p, с	$T_к$, с	T_{nx}, с	T_{ny}, с	T_{nz}, с
1					
2					
…					
	$\langle T_p \rangle = \ldots$ с	$\langle T_к \rangle = \ldots$ с	$\langle T_{nx} \rangle = \ldots$ с	$\langle T_{ny} \rangle = \ldots$ с	$\langle T_{nz} \rangle = \ldots$ с
		$\Delta T_к = \ldots$ с	$\Delta T_{nx} = \ldots$ с	$\Delta T_{ny} = \ldots$ с	$\Delta T_{nz} = \ldots$ с

5. Пункты 2-4 повторите не менее 5 раз.
6. Установите в рамку куб и снова повторите пп. 2-4 не менее 5 раз. Результаты измерения периода колебаний рамки с кубом $T_к$ занесите в таблицу 1.
7. Установите в рамку параллелепипед и повторите измерения по пп. 2-4 не менее 5 раз. Периоды колебаний параллелепипеда измерьте для трех взаимно перпендикулярных осей, для чего параллелепипед следует устанавливать соответствующим образом. Значения T_{nx}, T_{ny}, T_{nz} занесите в таблицу 1.

Обработка результатов

1. Используя значения массы и длины ребра куба, вычислите момент инерции $I_к$ куба по формуле (6). Массы и геометрические размеры грузов указаны на установках.
2. Вычислите средние значения всех измеренных периодов. Определите среднеквадратичное отклонение и случайную погрешность результата измерений периода маятника с параллелепипедом и кубом.
3. Подставляя в формулу (15) средние значения периодов $\langle T_{nx} \rangle$, $\langle T_{ny} \rangle$, $\langle T_{nz} \rangle$ рассчитайте экспериментальные значения I_n главных моментов инерции параллелепипеда I_{nx}, I_{ny}, I_{nz}.

Таблица 2. Сравнение экспериментальных и теоретических значений главных моментов инерции параллелепипеда

	Экспериментальное значение	Теоретическое значение
I_{nx}, кг·м^2		
I_{ny}, кг·м^2		
I_{nz}, кг·м^2		

4. Рассчитайте погрешности моментов инерции параллелепипеда ΔI_{nx}, ΔI_{ny}, ΔI_{nz}. Учитывая, что $T_n >> T_р$ и $T_к >> T_р$, для расчёта погрешности каждого из главных моментов инерции можно воспользоваться формулой:

$$\Delta I_n = I_n \sqrt{\left(\frac{\Delta I_к}{I_к}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T_n}{T_n}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T_к}{T_к}\right)^2},$$

где ΔT_n, $\Delta T_к$ – погрешности измерения периода маятника с параллелепипедом и кубом соответственно.

Погрешность момента инерции куба равна:

$$\Delta I_к = I_к \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2},$$

где Δm и Δa – погрешности массы и длины ребра куба (указаны на установке). Окончательные результаты запишите в таблицу 2.

5. Вычислите теоретические значения главных моментов инерции параллелепипеда по формулам (5), зная его геометрические размеры. Занесите в таблицу 2.

6. Сравните экспериментальные и теоретические значения главных моментов инерции параллелепипеда.

Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции твердого тела? В чем заключается физический смысл момента инерции?
2. От чего зависит момент инерции любого тела? Как он рассчитывается?
3. Что такое крутильные колебания? Какими уравнениями они описываются?
4. От чего зависит период крутильных колебаний?
5. Как определить момент инерции методом крутильных колебаний?
6. Почему T_n и $T_к$ много больше периода колебаний рамки $T_р$?

Литература

1. Детлаф, А. А. Курс физики: учебное пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. 9-е изд., стер. М.: Академия, 2014. 719с.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 томах / И. В. Савельев. — 17-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2021 — Том 1: Механика. Молекулярная физика — 2020. — 436 с.
3. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: учебное пособие для физических специальностей вузов: [в 5 томах] / Д. В. Сивухин. Изд. 6-е, стер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014-2019. Т. 1: Механика. 2019. 560 с.
4. Иванов, В. К. Физика. Механика. Колебания: учеб. пособие/ В. К. Иванов. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 224 с.
5. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных: методические указания / Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Кафедра экспериментальной физики; составители: Б. Д. Агапьев, В. В. Козловский. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012.