Лабораторная работа № 1.36

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

Цель работы

Определение моментов инерции различных конфигураций маятника Максвелла.

Задачи

1. Измерить время падения маятника Максвелла разной массы.
2. Определить моменты инерции исследованных конфигураций маятника Максвелла.

Введение

Важной физической характеристикой твёрдого тела является момент инерции, который служит мерой инертности тела при вращательном движении. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси можно найти суммированием моментов инерции его малых частей:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV$$

где ρ – плотность тела, а $dm = \rho dV$ — масса малого элемента тела объемом dV, расположенного на расстоянии r от оси вращения. Момент инерции тела зависит от плотности, формы и размеров тела, а также от положения тела относительно оси вращения.

Целью данной лабораторной работы является определение момента инерции маятника Максвелла, который представляет собой тело вращения (цилиндр, шар и т. п.), насаженное на стержень и подвешенное с помощью нитей к горизонтальной опоре (рис. 1). Под действием силы тяжести $m\vec{g}$ и сил натяжения нитей $\vec{T}$ маятник начинает двигаться вниз и вращаться. Достигнув нижней точки, маятник меняет направление скорости на противоположное и начинает подниматься, накручивая нить на стержень и постепенно замедляясь. В силу закона сохранения механической энергии (потери при движении маятника малы) маятник поднимается в исходное положение, после чего процесс периодически повторяется.

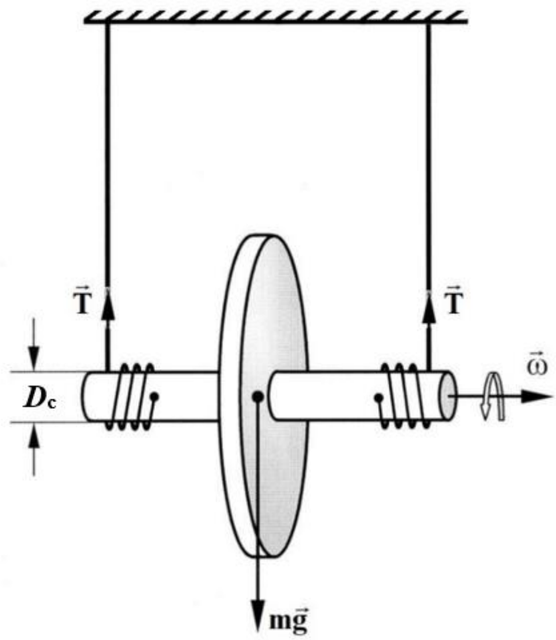


Рис. 1. Маятник Максвелла

Обычно при падении тела с высоты потенциальная энергия целиком преобразуется в кинетическую энергию поступательного движения. В случае же маятника Максвелла часть потенциальной энергии переходит в кинетическую энергию вращательного движения, поэтому кинетическая энергия и скорость поступательного движения оказываются меньше. Следовательно, линейное ускорение маятника Максвелла a также будет меньше, чем ускорение свободного падения g.

Выражение для ускорения a можно получить из законов динамики твёрдого тела, рассмотрев действующие на маятник силы. Мы, однако, используем другой подход, основанный на применении закона сохранения механической энергии.

Кинетическая энергия маятника складывается из

– энергии поступательного движения $\frac{m\upsilon^2}{2}$ (m – масса маятника; υ – скорость поступательного движения его центра масс);

– энергии вращательного движения $\frac{I\omega^2}{2}$ (ω – угловая скорость вращения маятника, I – момент инерции маятника относительно оси симметрии).

Потенциальная энергия mgh зависит от высоты его подъема h над нижним положением.

В соответствии с законом сохранения энергии

$$mgh + \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = const\,. \qquad (1)$$

Так как нить нерастяжима и не скользит по стержню, угловая скорость ω связана со скоростью поступательного движения маятника υ формулой:

$$\omega = \frac{\upsilon}{R}, \qquad (2)$$

где R – радиус стержня, с накрученной на него нитью толщиной d

$$R = \frac{D_c}{2} + d\,. \qquad (3)$$

Тогда формулу (1) можно переписать следующим образом:

$$mgh + \frac{\upsilon^2}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = const\,. \qquad (4)$$

Дифференцируя равенство (4) по времени, а также учитывая, что во время спуска

$$\frac{dh}{dt} = -\upsilon, \qquad \frac{d\upsilon}{dt} = a\,,$$

где a – линейное ускорение центра масс маятника, можно найти искомую связь между a и I:

$$-mg + a\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = 0\,. \qquad (5)$$

Все коэффициенты уравнения (5) постоянны, поэтому ускорение центра масс маятника также постоянно. Его можно определить из уравнения равноускоренного движения (маятник опускается из состояния покоя), зная путь l, пройденный маятником за время движения t:

$$a = \frac{2l}{t^2}. \qquad (6)$$

Подставив равенство (6) в выражение (5), получим рабочую формулу для определения момента инерции:

$$I = mR^2\left(\frac{g}{a} - 1\right) = \frac{mD^2}{4}\left(\frac{gt^2}{2l} - 1\right), \qquad (7)$$

где $$D = 2R = D_c + 2d.$$

В данной лабораторной работе маятник Максвелла состоит из стержня, с закреплённым посередине диском (роликом), на который может надеваться кольцо. Общая масса маятника равна сумме масс стержня (m_c), ролика (m_p) и кольца ($m_к$):

$$m = m_c + m_p + m_к. \qquad (8)$$

Момент инерции маятника может быть также вычислен теоретически по формуле:

$$I_{теор} = I_c + I_p + I_к, \qquad (9)$$

где I_c, I_p, $I_к$ – моменты инерции стержня, ролика и кольца относительно оси вращения маятника.

Момент инерции стержня массой m_c и диаметра D_c:

$$I_c = \frac{1}{8} m_c D_c^2. \qquad (10)$$

Момент инерции ролика – диска массой m_p с внешним диаметром D_p и внутренним диаметром D_c:

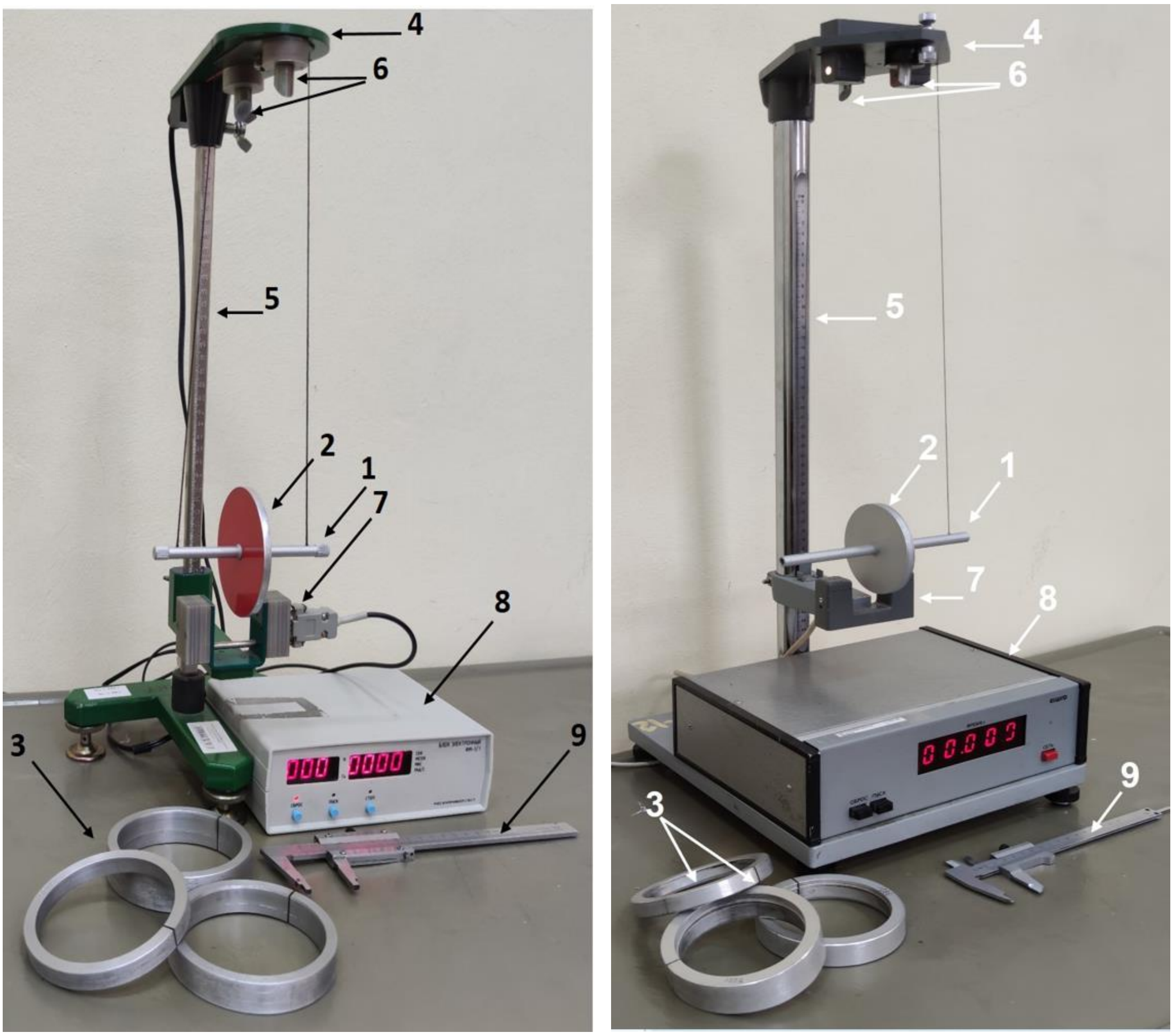
$$I_p = \frac{1}{8} m_p \left(D_p^2 + D_c^2\right). \qquad (11)$$

Момент инерции кольца массой $m_к$ с внешним диаметром $D_к$ и внутренним диаметром D_p:

$$I_к = \frac{1}{8} m_к \left(D_к^2 + D_p^2\right). \qquad (12)$$

Экспериментальная установка

Устройство экспериментальной установки показано на рисунке 2. Маятник Максвелла состоит из стержня 1, ролика 2, на который могут надеваться съемные кольца различной массы 3. При помощи двух нитей, закрепленных на стержне симметрично относительно ролика маятник подвешен к верхнему кронштейну 4 вертикальной колонны 5. На верхнем кронштейне находится электромагнит 6, позволяющий удерживать маятник в верхнем положении. С помощью миллиметровой шкалы на вертикальной колонне можно определить положение маятника.



(а) (б)

Рис. 2. Общий вид экспериментальной остановки (два варианта)

В нижней части колонны находится подвижный кронштейн с прикрепленным к нему фотоэлектрическим датчиком 7, который останавливает отсчет времени электронным секундомером 8 при пересечении маятником светового луча (оптической оси датчика). Нижний кронштейн может перемещаться вдоль колонны и фиксироваться в произвольно выбранном положении, которое отсчитывается по шкале с помощью указателя, помещенного на высоте оптической оси фотодатчика.

Для измерения геометрических размеров маятника в комплекте лабораторного оборудования имеется также штангенциркуль 9.

В лабораторной установке, изображённой на рисунке 2б, на верхнем кронштейне расположен ещё один фотоэлектрический датчик, который срабатывает после того, как маятник опустится на 1 см. С этого момента начинается отсчет времени электронным секундомером.

Порядок проведения эксперимента

1. С помощью штангенциркуля измерьте диаметр стержня без нити $D_с$ и с намотанной нитью $D = D_с+2d$, внешние диаметры ролика $D_р$ и колец $D_к$. Результаты измерений, а также массы исследуемых тел занесите в таблицу 1.
2. Включите прибор в сеть. При этом должны загореться лампочка фотодатчика и цифровой индикатор секундомера.
3. Измерьте длину l как разность показаний шкалы на вертикальной колонне в верхнем и нижнем положениях маятника (относительно его оси или нижней части диска).
4. Наденьте на ролик одно из колец. Внутри кольца имеется уступ, который позволяет точно позиционировать его на ролике. Поэтому надевать кольцо на ролик следует той стороной, у которой диаметр отверстия больше.
5. Намотайте на стержень нить, обращая внимание на равномерность наматывания витков нити. Витки должны находиться рядом и не перекрывать друг друга.
6. Зафиксируйте электромагнитом маятник в верхнем положении. Нить при этом не должна провисать, но сильное натяжение также нежелательно, так как

сила трения будет препятствовать раскручиванию, искажая результат. Немного отклоните маятник на себя или от себя. Это обеспечит нормальное «отлипание» маятника после выключения магнита.

7. Обнулите показания секундомера кнопкой «СБРОС».

8. Нажмите кнопку «ПУСК».

9. Произведите отсчет времени опускания маятника t по секундомеру.

10. Для уменьшения случайной погрешности проведите измерение времени опускания маятника не менее 10 раз. Результаты измерений t занесите в таблицу1.

11. Повторите измерения в соответствии с пп. 5-10, используя остальные съемные кольца. Результаты измерений времени занесите в ту же таблицу 1.

Таблица 1. Измерение времени падения маятника

l=…±… м; $m_с$=…±… кг, $D_с$=…±… м; D=…±… м; $m_р$=…±… кг, $D_р$=…±… м;							
	$m_{к1}$=…±… кг $D_{к1}$=…±… м			$m_{к2}$=…±… кг $D_{к2}$=…±… м			…
№	t_i, с	$t_i - \langle t \rangle$, с	$\left(t_i - \langle t \rangle\right)^2$, с^2	t_i, с	$t_i - \langle t \rangle$, с	$\left(t_i - \langle t \rangle\right)^2$, с^2	
1							
2							
…							
	$\langle t \rangle =$ ..., с	$\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \langle t \rangle\right) =$ …, с	$\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \langle t \rangle\right)^2 =$ ..., с^2	$\langle t \rangle =$ ..., с	$\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \langle t \rangle\right) =$ …, с	$\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \langle t \rangle\right)^2 =$ …, с^2	

Обработка результатов

1. Вычислите среднее значение, среднеквадратичное отклонение и случайную погрешность измерения времени движения маятника Δt.

2. Определите величину момента инерции маятника Максвелла для каждой серии измерений с помощью формулы (7), используя при расчётах среднее время падения.

При выполнении лабораторной работы на установке, изображённой на рисунке 2б, секундомер измеряет время движения между двумя фотодатчиками, причём первый срабатывает после прохождения маятником $l_1 = 1$см. Поэтому в формуле (7) в качестве t необходимо использовать измеренное время из таблицы 1 с поправкой k (см. дополнение к работе):

$$t = k\langle t\rangle,$$

$$k = \frac{1}{1-\sqrt{\dfrac{l_1}{l}}}.$$

3. Рассчитайте погрешность момента инерции ΔI

$$\Delta I = I\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta t}{t}\frac{1}{1-\dfrac{2l}{gt^2}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\frac{1}{1-\dfrac{2l}{gt^2}}\right)^2},$$

где Δl – погрешность измерения пройденного расстояния, ΔD – погрешность измерения диаметра, Δm – погрешность массы маятника.

4. Рассчитайте теоретические значения момента инерции для каждой конфигурации, используя формулы (9)-(12).

5. Сравнить теоретические и экспериментальные значения.

Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции?
2. Чему равна кинетическая энергия вращающегося тела?
3. Выведите формулы, связывающие момент инерции и ускорение, исходя из основного закона динамики вращательного движения.

4. Справедливо ли соотношение (2) для растяжимой нити?

Литература

1. Савельев, И. В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 томах / И. В. Савельев. — 17-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2021 — Том 1: Механика. Молекулярная физика — 2020. — 436 с.

2. Иродов, И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. — М.: Лаборатория знаний, 2014. — 309 с.

3. Иванов, В. К. Физика. Механика. Колебания: учеб. пособие/ В. К. Иванов. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 224 с.

4. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных: методические указания / Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Кафедра экспериментальной физики; составители: Б. Д. Агапьев, В. В. Козловский. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012.

Дополнение

В п.2 раздела «Обработка результатов» отмечено, что при выполнении лабораторной работы на установке, изображённой на рисунке 2б, секундомер измеряет время движения между двумя фотодатчиками $t_{изм}$:

$$t_{изм} = t - t_1,$$

где t_1 – время пролёта маятником первого фотодатчика, установленного на расстоянии l_1 от верхнего кронштейна, t – время пролёта второго фотодатчика, установленного на расстоянии l.

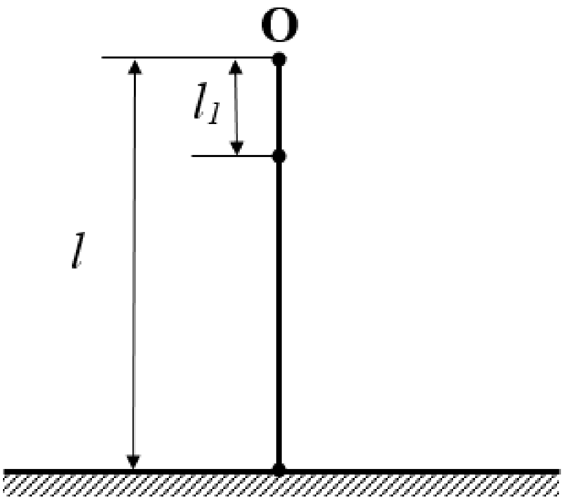


Рис. 3. Движение маятника между двумя фотодатчиками

Из уравнения равноускоренного движения, учитывая, что начальная скорость маятника равна нулю,

$$l_1 = \frac{at_1^2}{2}, \quad l = \frac{at^2}{2},$$

$$\frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{l_1}{l}},$$

тогда измеряемое время

$$t_{изм} = t - t_1 = t - t\sqrt{\frac{l_1}{l}} = t\left(1 - \sqrt{\frac{l_1}{l}}\right).$$

В формуле (7) для расчёта момента инерции t – время движения маятника из состояния покоя от верхнего кронштейна до нижнего фотодатчика, то есть время прохождения расстояния l, которое равно

$$t = \frac{t_{изм}}{\left(1 - \sqrt{\frac{l_1}{l}}\right)} = k \cdot t_{изм}, \qquad k = \frac{1}{\left(1 - \sqrt{\frac{l_1}{l}}\right)}.$$

Поэтому при выполнении лабораторной работы на установке, изображённой на рисунке 2б, в формуле (7) в качестве t необходимо использовать измеренное время из таблицы 1 с поправкой k.