Лабораторная работа № 1.37

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ФИЗИЧЕСКОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКОВ

Цель работы

Определение ускорения свободного падения.

Задачи

1. Измерить период колебаний физического маятника в зависимости от расстояния между осью подвеса и центром масс.
2. Измерить период колебаний математического маятника при разных длинах подвеса.
3. Рассчитать ускорение свободного падения.

Введение

Физическим маятником называется твердое тело, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения, не проходящую через центр масс, относительно которой тело может совершать колебания под действием силы тяжести. Относительно любой оси вращения физический маятник имеет два положения равновесия: устойчивое, если ось расположена выше центра масс, и неустойчивое – в противном случае. Вблизи устойчивого положения равновесия маятник может совершать малые колебания.

Если маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол φ, то составляющая F_n силы тяжести mg уравновешивается силой реакции оси O, а составляющая F_τ стремится возвратить маятник в положение равновесия (рис. 1). При этом $F_\tau = mg \sin\varphi$, её момент в проекции на ось вращения

$$M = F_\tau\, l = -\, mgl\, sin\varphi, \tag{1}$$

где l – расстояние между точкой подвеса и центром тяжести маятника, который в однородном поле тяжести совпадает с центром масс. Знак минус означает, что проекции углового смещения φ и момента силы F_τ на ось вращения имеют противоположные знаки. При малых отклонениях маятника от положения равновесия $\sin\varphi \approx \varphi$, поэтому $M \approx -mgl\varphi$.

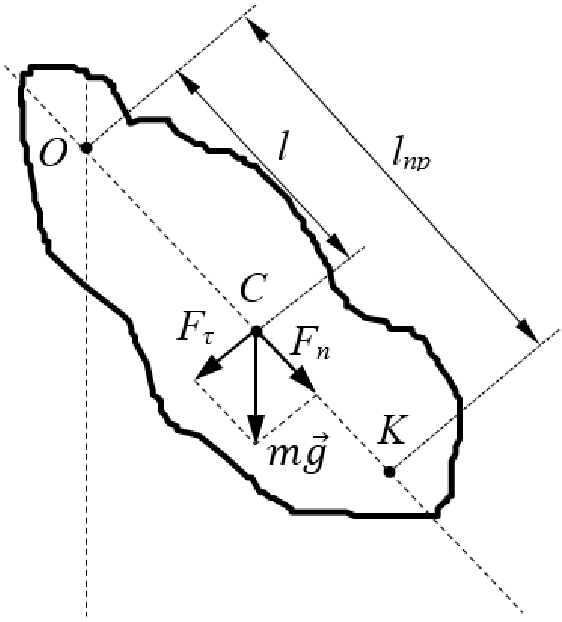


Рис.1. Физический маятник

Согласно основному закону динамики вращательного движения:

$$I\beta = M, \tag{2}$$

где I – момент инерции маятника относительно оси O, $\beta = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ – угловое ускорение маятника.

С учетом (1) уравнение (2) можно записать в виде

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl\varphi = 0$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0\,, \tag{3}$$

где $\omega^2 = mgl/I$.

Решением дифференциального уравнения (3) является функция

$$\varphi = \varphi_0\cos(\omega t + \alpha)\,, \tag{4}$$

позволяющая определить положение маятника в любой момент времени t. Из выражения (4) следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания (колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по законам синуса или косинуса) с амплитудой колебаний φ_0, циклической частотой $\omega=\sqrt{mgl / I}$, начальной фазой α и периодом колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{np}}{g}}, \qquad (5)$$

где $l_{np} = I/(ml)$ – *приведенная длина физического маятника*.

Следовательно, располагая для данного физического маятника значениями T, I, m, l, можно определить ускорение свободного падения. Проблема в том, что измерить момент инерции I и расстояние l от центра масс до оси подвеса довольно сложно. Поэтому желателен такой метод, в котором нет необходимости находить I и l.

По теореме Штейнера момент инерции физического маятника может быть представлен в виде

$$I = I_c + ml^2,$$

где I_c – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс.

Подставив это выражение в формулу (5) получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_c + ml^2}{mgl}}. \qquad (6)$$

График зависимости (6) периода колебаний маятника от расстояния l между центром масс и осью подвеса изображён на рисунке 2. Любая прямая, параллельная оси абсцисс и пересекающая кривую $T(l)$, дает пару точек подвеса с одинаковыми периодами колебаний. Найдем аналитическую зависимость между l_1 и l_2. Так как период колебаний маятника при этих длинах совпадает, из формулы (6) можно записать:

$$\frac{I_c + ml_1^2}{l_1} = \frac{I_c + ml_2^2}{l_2},$$

откуда, при $l_1 \neq l_2$, получим:

$$I_c = ml_1 l_2 \tag{7}$$

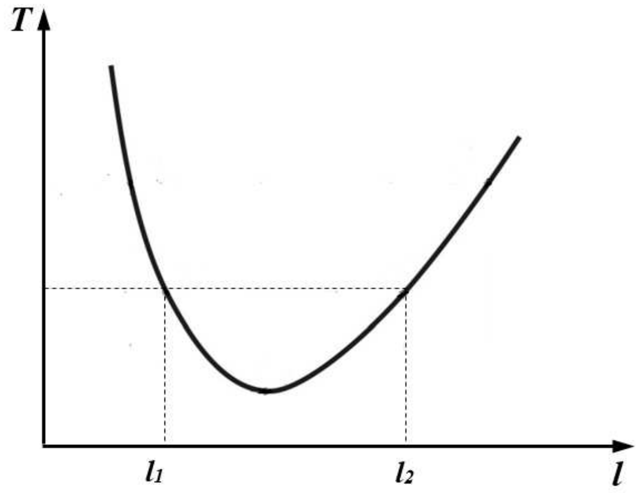


Рис.2. Зависимость периода колебаний маятника от расстояния l между центром масс и осью подвеса

Формула (7) позволяет выразить период колебаний физического маятника только через величины l_1 и l_2. Действительно, запишем формулу (6) с любым из значений l и подставим в нее выражение (7):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}} \tag{8}$$

Таким образом, сумму $l_1 + l_2$ можно отождествить с приведенной длиной данного физического маятника $l_{\text{пр}}$. Следовательно, располагая графиком вида, изображенного на рис.2, можно получить приведенную длину маятника, избежав при этом измерения его момента инерции. Из формулы (8) имеем:

$$g = \frac{4\pi^2 l_{np}}{T^2} \tag{9}$$

По формуле (9) вычисляется ускорение свободного падения.

Математическим маятником называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести. Хорошим приближением математического маятника является небольшой массивный шарик, подвешенный на тонкой длинной нити. Математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, у которого момент инерции $I = ml^2$, где l – длина нити. С учетом этого при малых колебаниях период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{10}$$

Сравнивая (5) и (10), видим, что если приведенная длина $l_{пр}$ физического маятника равна длине l математического маятника, то их периоды колебаний одинаковы. Следовательно, приведенная длина физического маятника - это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

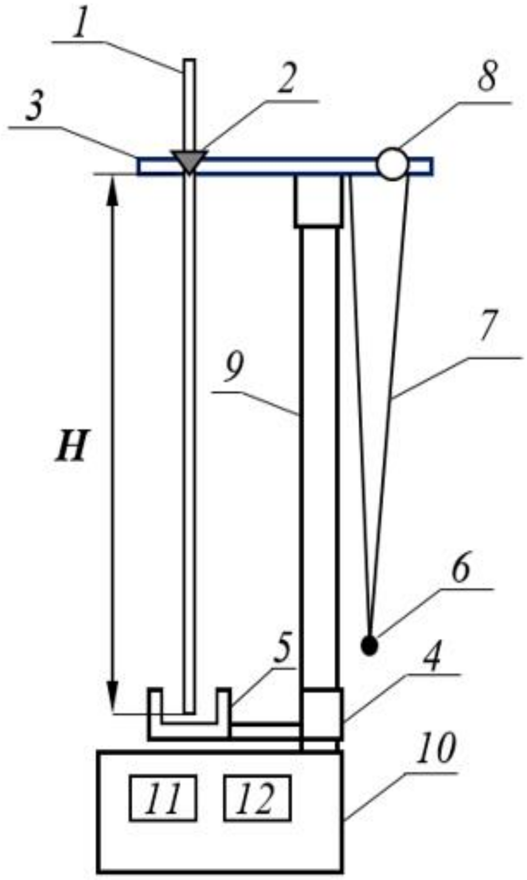
Из формулы (10) можно выразить ускорение свободного падения g и рассчитать его по измеренным значениям T и l:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\,. \tag{11}$$

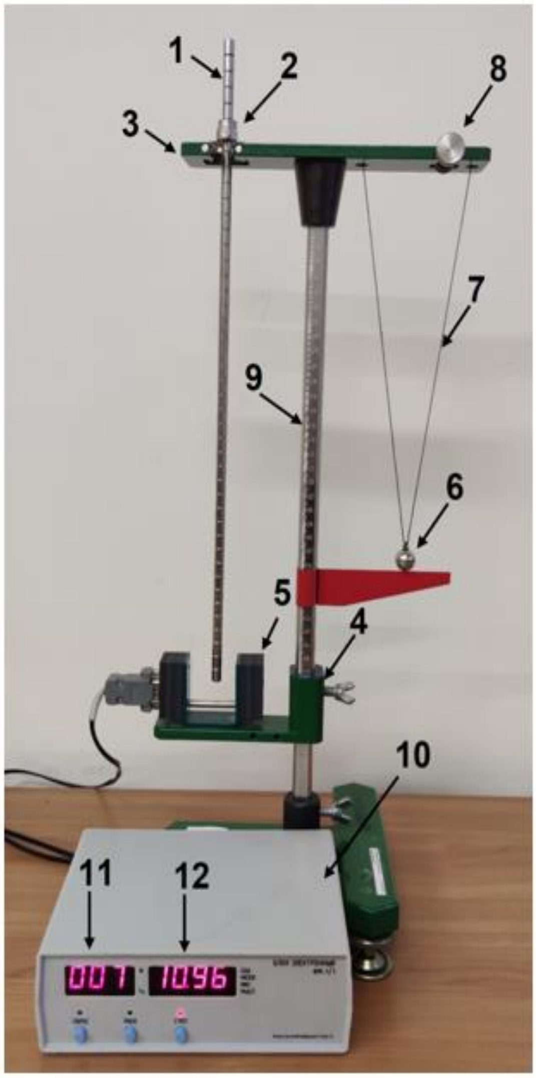
Ускорение свободного падения зависит от широты места и его высоты над уровнем моря. Ускорение свободного падения на широте г. Санкт-Петербург (59°56′19″ с.ш.) $g_{СПб} \approx 9{,}82$ м/с^2. Если полученные экспериментально значения для физического и математического маятников совпадут с $g_{СПб}$ (в пределах погрешности), это будет означать, что в эксперименте подтверждена рассмотренная выше теория колебаний.

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представлена на рисунке 3. В работе используется физический маятник, представляющий собой металлический стержень 1, на котором закреплена опорная призма 2. Призма может перемещаться по всей длине стержня и фиксироваться на стержне в любом положении с помощью блокирующего воротка. Стержень имеет кольцевые проточки, нанесенные через 10 мм, которые служат для надежной фиксации опорной призмы, а также для отсчета расстояний.



(а)



(б)

Рис. 3. Общий вид экспериментальной установки: а) схема, б) фотография

В верхнем кронштейне 3 расположены вкладыши для фиксации опорных призм. В нижнем кронштейне 4 закреплён фотодатчик 5. Во время колебаний маятник пересекает световой поток фотоэлектрического датчика и сигнал с датчика поступает на миллисекундомер 10.

Математический маятник представляет собой металлический шарик 6, подвешенный на бифилярном (двойном) подвесе 7. Длину подвеса можно менять, вращая ручку 8. На вертикальной стойке 9 нанесена шкала для определения длины математического маятника.

Секундомер 10 предназначен для подсчета количества колебаний маятника (цифровой индикатор 11) и измерения времени (цифровой индикатор 12). На панели имеются кнопки включения счета «ПУСК», остановки счета «СТОП» и установки нуля «СБРОС». Индикатор счета колебаний отображает количество полных колебаний.

Порядок проведения эксперимента

Опыт 1. Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника

1. Поверните верхний кронштейн таким образом, чтобы стержень пересекал оптическую ось фотодатчика. При необходимости, отрегулируйте высоту фотодатчика.
2. Определите длину стержня *L*.
3. Закрепите опорную призму так, чтобы ее острие находилось на расстояние 4 см от верхнего конца стержня, и было направлено вниз к центру стержня. Расстояние *H* от острия призмы до нижнего конца стержня занесите в таблицу1.
4. Установите маятник, точно поместив опорную призму во вкладыши на верхнем кронштейне.
5. Нажмите кнопку «СЕТЬ», при этом должны загореться лампочка фотодатчика и цифровые индикаторы секундомера.
6. Проведите пробное измерение. Для этого аккуратно отклоните маятник на угол 5-10^{o} от вертикальной оси и отпустите. После одного – двух колебаний нажмите кнопку «ПУСК». Когда в левом окошке появится цифра 9, нажмите кнопку «СТОП». Секундомер остановится, показывая время 10 колебаний.

7. Проведите серию измерений времени t (не менее 15), за которое происходит $n = 10$ полных колебаний, смещая при каждом новом измерении опорную призму на 1 см к центру масс маятника. Результаты измерения периода T и расстояния H занесите в таблицу 1.

Таблица 1. Измерение периода колебаний физического маятника при разных положениях опорной призмы

№	H, м	l, м	$T= t/n$, с
1			
…			

Опыт 2. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника

1. Установите с помощью ручки 8 длину подвеса математического маятника в пределах 40-45 см.
2. Поверните верхний кронштейн таким образом, чтобы шарик математического маятника оказался в рабочей зоне фотодатчика. При необходимости подрегулируйте длину математического маятника.
3. Определите с помощью шкалы на вертикальной стойке 8 длину подвеса маятника l.
4. Проведите серию из 3 измерений времени t, за которое происходит $n = 10$ колебаний. Результаты всех измерений занесите в таблицу 2.
5. Повторите измерения по пп.3 и 4, изменяя длину подвеса маятника (не менее, чем для 5 различных длин).

Таблица 2. Измерение периода колебаний математического маятника при разных длинах нити

№	l, м	T_1, с	T_2, с	T_3, с	$\langle T \rangle$, с	g, м/с^2
1						
…						

Обработка результатов

Опыт 1

1. По полученным данным рассчитайте расстояние от опорной призмы до центра масс маятника

$$l = H - \frac{L}{2},$$

учитывая, что для однородного стержня центр масс расположен посередине. Результаты занесите в таблицу 1.

2. Постройте график зависимости периода колебаний T от расстояния l между опорной призмой и центром масс маятника.

3. Проведите на графике три секущие, параллельные оси абсцисс. Используя координаты точек пересечения с ветвями, определите три значения приведенной длины $l_{\text{пр}} = l_1 + l_2$.

4. По формуле (9) определите ускорение свободного падения g для трех значений $l_{\text{пр}}$ и найдите среднее значение $\langle g \rangle$.

5. Оцените погрешность ускорения свободного падения Δg, полученного с помощью физического маятника.

6. Результат представьте в виде $g_ф = \langle g \rangle \pm \Delta g$ и укажите единицу измерения.

Опыт 2

1. Определите среднее значение периода колебания $\langle T \rangle$, соответствующее определённой длине математического маятника.

2. Вычислите по формуле (11) ускорение свободного падения g для каждой длины маятника, результат занесите в таблицу 2.

3. Вычислите среднее значение $\langle g \rangle$, среднеквадратичное отклонение и случайную погрешность ускорения свободного падения Δg, полученного с помощью математического маятника.

4. Результат представьте в виде $g_м = \langle g \rangle \pm \Delta g$ и укажите единицу измерения.

5. Сравнить значения ускорения свободного падения, полученные с помощью физического и математического маятников, с табличной величиной.

Контрольные вопросы

1. Что такое физический маятник?
2. Что называется приведенной длиной физического маятника?
3. От чего зависит период колебаний физического маятника?
4. Объясните суть метода определения ускорения свободного падения с помощью физического маятника.

Литература

1. Савельев, И. В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 томах / И. В. Савельев. — 17-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2021 — Том 1: Механика. Молекулярная физика — 2020. — 436 с.
2. Иродов, И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. — М.: Лаборатория знаний, 2014. — 309 с.
3. Иванов, В. К. Физика. Механика. Колебания: учеб. пособие/ В. К. Иванов. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 224 с.
4. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных: методические указания / Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Кафедра экспериментальной физики; составители: Б. Д. Агапьев, В. В. Козловский. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012.