Лабораторная работа № 1.38

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ОБОРОТНОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКОВ

Цель работы

Определение ускорения свободного падения.

Задачи

1. Измерить период колебаний оборотного маятника при разных положениях центра масс.
2. Измерить период колебаний математического маятника при разных длинах подвеса.
3. Рассчитать ускорение свободного падения.

Введение

Физическим маятником называется твердое тело, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения, не проходящую через центр масс, относительно которой тело может совершать колебания под действием силы тяжести. Относительно любой оси вращения физический маятник имеет два положения равновесия: устойчивое, если ось расположена выше центра масс, и неустойчивое – в противном случае. Вблизи устойчивого положения равновесия маятник может совершать малые колебания.

Если маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол φ, то составляющая F_n силы тяжести mg уравновешивается силой реакции оси O, а составляющая F_τ стремится возвратить маятник в положение равновесия. При этом $F_\tau = mg \sin\varphi$, её момент относительно оси О

$$M = F_\tau\, l = -\,mgl\, sin\varphi, \tag{1}$$

где l – расстояние между точкой подвеса и центром тяжести маятника, который в однородном поле тяжести совпадает с его центром масс. Знак минус означает, что проекции углового смещения φ и момента силы F_τ на ось вращения имеют противоположные знаки. При малых отклонениях маятника от положения равновесия $\sin\varphi \approx \varphi$, поэтому $M \approx -mgl\varphi$.

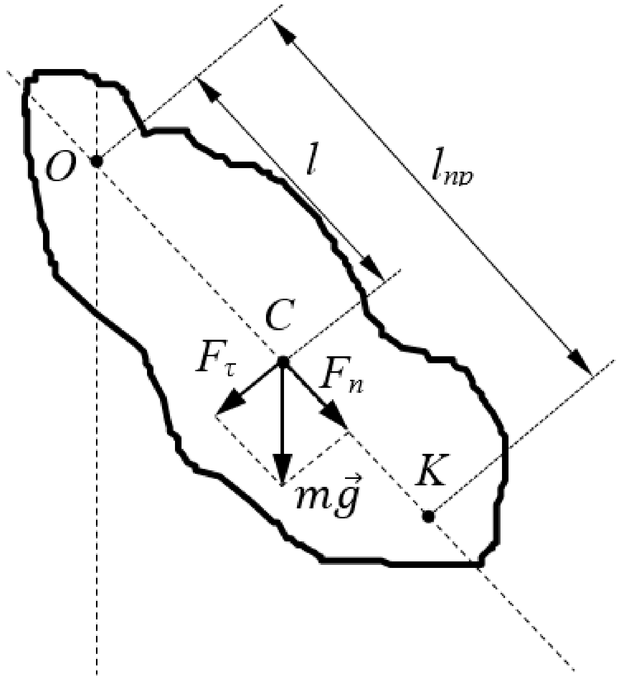


Рис.1 Физический маятник

Согласно основному закону динамики вращательного движения:

$$I\beta = M, \qquad (2)$$

где I - момент инерции маятника относительно оси O, $\beta = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ – угловое ускорение маятника.

С учетом (1) уравнение (2) можно записать в виде

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl\varphi = 0$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0\,, \qquad (3)$$

где $\omega^2 = mgl/I$.

Решением дифференциального уравнения (3) является функция

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)\,, \qquad (4)$$

позволяющая определить положение маятника в любой момент времени t. Из выражения (4) следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания (колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по законам синуса или косинуса) с амплитудой колебаний φ_0, циклической частотой $\omega = \sqrt{mgl / I}$, начальной фазой α и периодом колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}\,, \tag{5}$$

где *приведенная длина физического маятника*

$$l_{пр} = \frac{I}{ml} \tag{6}$$

По теореме Штейнера момент инерции I относительно оси О можно записать в виде:

$$I = I_c + ml^2, \tag{7}$$

где I_c – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс C и параллельной оси O.

Из выражений (6) и (7) следует, что

$$l_{пр} = \frac{I_c + ml^2}{ml} = \frac{I_c}{ml} + l\,. \tag{8}$$

Величины I_c, m и l всегда положительны, поэтому $l_{пр} > l$. Точка K на продолжении прямой OC, отстоящая от оси подвеса на расстоянии приведенной длины $l_{пр}$, называется *центром качания физического маятника* (рис. 1). Точка подвеса O и центр качания K обладают свойством взаимности (или сопряженности): если ось подвеса сделать проходящей через центр качания, то точка O прежней оси подвеса станет новым центром качания и период колебаний маятника не изменится.

Действительно, если мы перевернем маятник, то расстояние от новой точки подвеса К до центра масс С будет равно (см. рис. 1)

$$l' = l_{пр} - l = \frac{I_c}{ml}\,.$$

Приведенная длина в этом случае

$$l'_{np} = \frac{I_c}{ml'} + l' = l + \frac{I_c}{ml} = l_{np}$$

не изменяется, а, следовательно, и период колебаний при этом не изменится.

Это свойство взаимности используется в оборотном маятнике для определения приведенной длины l_{np}, зная которую из (5) можно определить ускорение свободного падения g:

$$g = \frac{4\pi^2 l_{np}}{T^2}. \tag{9}$$

Оборотным называется такой физический маятник, у которого имеются две параллельные друг другу опорные призмы, за которые он может быть поочередно подвешен. В нашем случае (рис. 2) оборотный физический маятник представляет собой стальной стержень 1, на котором закреплены две опорные призмы 2 и 3, ребра которых обращены друг к другу, и два массивных груза – чечевицы 4 и 5. Маятник подвешивается на кронштейне 6 так, что ребро призмы 2 или 3 опирается на него.

Перемещением чечевиц или опорных призм на стержне можно добиться совпадения периодов колебаний маятника при его качании на обеих опорных призмах. При этом расстояние между сопряженными ребрами опорных призм будет равно приведенной длине l_{np}. Поскольку процесс подбора положения чечевиц или призм на стержне, при которых с высокой точностью указанные выше периоды колебаний совпадут, довольно трудоемок, то в данной работе для определения периода колебаний, соответствующего сопряженным ребрам, предлагается следующая методика. Исследуется зависимость периода колебаний маятника T_1 от положения чечевицы 5 (от расстояния h) при подвешивании маятника за призму 2 и аналогичная зависимость периода T_2 при подвешивании маятника за призму 3. Графики зависимостей $T_1(h)$ и $T_2(h)$ пересекутся. Точка пересечения соответствует выполнению условия сопряженности: $T_1 = T_2 = T$. Значение T, определенное таким образом, используется для расчета по формуле (9) ускорения свободного падения.

Математическим маятником называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести. Хорошим приближением математического маятника является небольшой массивный шарик, подвешенный на тонкой длинной нити. Математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, у которого момент инерции $I = ml^2$, где l – длина нити. С учетом этого при малых колебаниях период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{10}$$

Сравнивая (5) и (10), видим, что если приведенная длина $l_{пр}$ физического маятника равна длине l математического маятника, то их периоды колебаний одинаковы. Следовательно, приведенная длина физического маятника - это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Из формулы (10) можно выразить ускорение свободного падения g и рассчитать его по измеренным значениям T и l:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\,. \tag{11}$$

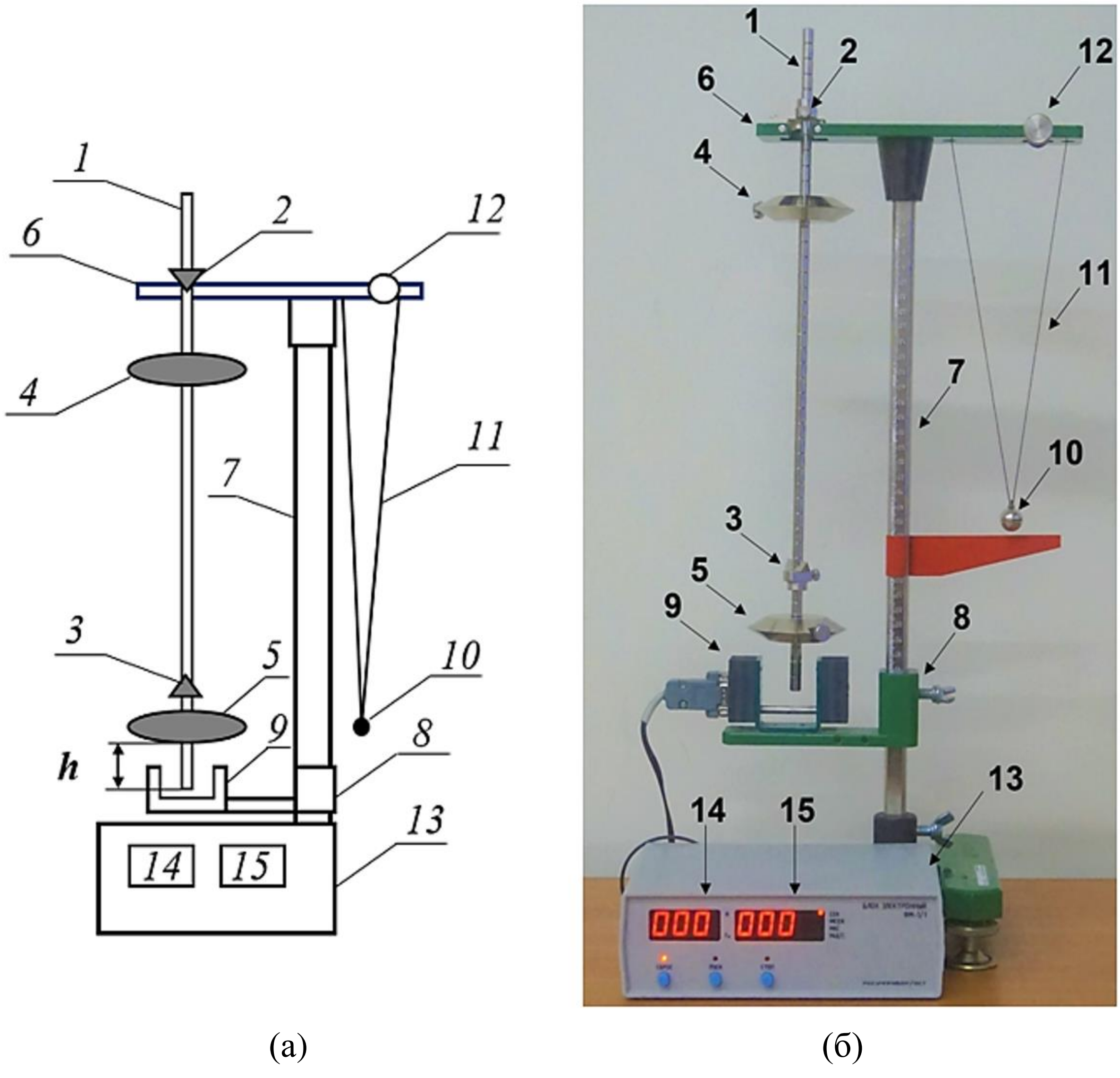
Ускорение свободного падения зависит от широты места и его высоты над уровнем моря. Ускорение свободного падения на широте г. Санкт-Петербург (59°56′19″ с.ш.) $g_{СПб} \approx 9{,}82$ м/с^2. Если полученные экспериментально значения для физического и математического маятников совпадут с $g_{СПб}$ (в пределах погрешности), это будет означать, что в эксперименте подтверждена рассмотренная выше теория колебаний.

Экспериментальная установка

В данной лабораторной работе для экспериментальных исследований используется универсальный маятник (рис. 2), включающий физический оборотный маятник и математический маятник.

Как уже отмечалось выше, физический оборотный маятник представляет собой стальной стержень 1, на котором закреплены две опорные призмы 2 и 3, ребра которых обращены друг к другу, и две массивные чечевицы 4 и 5. Чечевицы и опорные призмы могут перемещаться по всей длине стержня и фиксироваться в требуемом положении.

Стержень имеет кольцевые проточки, нанесенные через 10 мм, которые служат для надежной фиксации опорной призмы, а также для отсчета расстояний. Маятник может поочередно подвешиваться к верхнему кронштейну 6 за призму 2 или 3. Верхний кронштейн 6 может быть повернут вокруг стойки 7 на 360° .



(а) (б)

Рис. 2. Общий вид экспериментальной установки: а) схема, б) фотография

В верхнем кронштейне 6 расположены вкладыши для фиксации опорных призм. В нижнем кронштейне 8 закреплён фотодатчик 9. Во время колебаний маятник пересекает световой поток фотоэлектрического датчика и сигнал с датчика поступает на секундомер 13.

Математический маятник представляет собой металлический шарик 10, подвешенный на бифилярном (двойном) подвесе 11. Длину подвеса можно менять, вращая ручку 12. На вертикальной стойке 7 нанесена шкала для определения длины математического маятника.

Секундомер 13 предназначен для подсчета количества колебаний маятника (цифровой индикатор 14) и измерения времени (цифровой индикатор 15). На панели имеются кнопки включения счета «ПУСК», остановки счета «СТОП» и установки нуля «СБРОС». Индикатор счета колебаний отображает количество полных колебаний.

Порядок проведения эксперимента

Опыт 1. Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника

1. Зафиксируйте опорные призмы 2 и 3 и чечевицы 4 и 5 на стержне в положениях, обозначенных на рис. 3. Рекомендуемые расстояния x_1, x_2 и x_3 приведены на установке.
2. Установите маятник так, чтобы призма 2 точно зафиксировалась во вкладышах на верхнем кронштейне.
3. Поверните верхний кронштейн таким образом, чтобы стержень пересекал оптическую ось фотодатчика. При необходимости, отрегулируйте высоту фотодатчика.
4. Нажмите кнопку «СЕТЬ», при этом должны загореться лампочка фотодатчика и цифровые индикаторы секундомера.

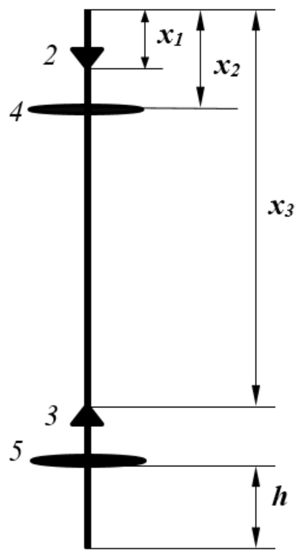


Рис.3. Расположение чечевиц и призм на стержне
оборотного физического маятника

5. Проведите пробное измерение. Для этого аккуратно отклоните маятник на угол 5-10° от вертикальной оси и отпустите. После одного – двух колебаний нажмите кнопку «ПУСК». Когда в левом окошке появится цифра 9, нажмите кнопку «СТОП». Секундомер остановится, показывая время 10 колебаний.

6. Измерьте время n = 10 полных колебаний и определите период колебаний при прямом положении маятника $T_1 = t / n$.

7. Измерения по п.6 повторить для других положений чечевицы 5. Расстояние h рекомендуется изменять от минимального до максимального значения через 1 см.

8. Переверните маятник и подвесьте его за призму 3.

9. Измерьте T_2 при обратном положении маятника (период колебаний маятника, подвешенного за призму 3) при разных положениях той же чечевицы 5.

10. Результаты измерения T_1 и T_2 занесите в таблицу 1.

11. Измерьте расстояние L между ребрами призм 2 и 3.

Таблица 1. Измерение периода колебаний оборотного маятника при разных положениях чечевицы 5

№	h, см	T_1, с	T_2, с
1			
…			
n			

Опыт 2. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника

1. Установите с помощью ручки 8 длину подвеса математического маятника в пределах 40-45 см.
2. Поверните верхний кронштейн таким образом, чтобы шарик математического маятника оказался в рабочей зоне фотодатчика. При необходимости подрегулировать длину математического маятника.
3. Определите с помощью шкалы на вертикальной стойке 8 длину подвеса маятника l.
4. Проведите серию из 3 измерений времени t, за которое происходит $n = 10$ колебаний. Результаты всех измерений занесите в таблицу 2
5. Повторите измерения по пп.3 и 4, изменяя длину подвеса маятника (не менее, чем для 5 различных длин)

Таблица 2. Измерение периода колебаний математического маятника при разных длинах нити

№	l, м	T_1, с	T_2, с	T_3, с	$\langle T \rangle$, с	g, м/с^2
1						
…						
5						

Обработка результатов

Опыт 1

1. Постройте графики зависимостей $T_1(h)$ и $T_2(h)$ и определите значение T, соответствующее точке пересечения графиков.

2. По формуле (9) вычислите ускорение свободного падения g, учитывая, что при выполнении условия $T_1 = T_2 = T$, расстояние между ребрами опорных призм будет равно приведенной длине $L = l_{np}$.

3. Оцените погрешность измерения ускорения свободного падения Δg с помощью оборотного маятника.

$$\Delta g = g\sqrt{\left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_{np}}{l_{np}}\right)^2},$$

где погрешность измерения периода ΔT может быть определена по графику как половина расстояния между ближайшими к точке пересечения T экспериментальными значениями периода;

$\Delta l_{пр}$ – погрешности измерения приведённой длины.

4. Результат представьте в виде $g_ф = g \pm \Delta g$ и укажите единицу измерения.

Опыт 2

1. Определите среднее значение периода колебания $<T>$, соответствующее определённой длине математического маятника.

2. Вычислите по формуле (11) ускорение свободного падения g для каждой длины маятника, результат занесите в таблицу 2.

3. Вычислите среднее значение $<g>$, среднеквадратичное отклонение и случайную погрешность ускорения свободного падения Δg, полученного с помощью математического маятника.

4. Результат представьте в виде $g_м =< g > \pm \Delta g$ и укажите единицу измерения.

5. Сравнить значения ускорения свободного падения, полученные с помощью физического и математического маятников, с табличной величиной.

Контрольные вопросы

1. Что такое физический маятник?
2. Что называется приведенной длиной физического маятника?
3. Что такое период колебаний? Минимальное значение периода колебаний?
4. Объясните суть метода определения ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника.

Литература

1. Савельев, И. В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 томах / И. В. Савельев. — 17-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2021 — Том 1: Механика. Молекулярная физика — 2020. — 436 с.
2. Иродов, И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. — М.: Лаборатория знаний, 2014. — 309 с.
3. Иванов, В. К. Физика. Механика. Колебания: учеб. пособие/ В. К. Иванов. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 224 с.
4. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных: методические указания / Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Кафедра экспериментальной физики; составители: Б. Д. Агапьев, В. В. Козловский. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012.