

ИССЛЕДОВАНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Задача

1. Исследовать зависимость периода колебаний от момента инерции маятника.
2. По результатам п. 1 определить модуль сдвига стали.

ВВЕДЕНИЕ

Крутильный маятник представляет собой тело, которое может вращаться на упругом подвесе. В лабораторной работе штанга с закрепленными на ней грузами вращается на подвесе из стальной проволоки.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси описывается основным законом динамики вращательного движения

$$I \frac{d\omega}{dt} = M \quad (1)$$

где M — момент сил относительно оси вращения, I — момент инерции тела относительно той же оси и $\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение.

При повороте штанги происходит скручивание проволоки, в результате чего возникает момент M , возвращающий штангу в исходное положение. Определим зависимость этого момента от угла и параметров проволоки. При скручивании проволоки отдельные ее слои поворачиваются относительно друг друга - возникают деформации сдвига. Для их определения рассмотрим столбик высоты l с площадью

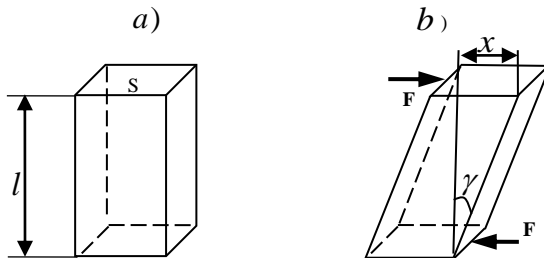


Рис. 1

основания S (рис. 1а). Приложим к его основаниям две одинаковые силы \mathbf{F} в противоположных направлениях (рис. 1б), при этом смещение одного основания относительно другого будет равно x . Относительная деформация может быть вычислена как отношение

$$\frac{x}{l} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma ,$$

поскольку при упругих деформациях, с которыми мы будем иметь дело $x \ll l$. Отношение силы F к площади S называют тангенциальным напряжением $\sigma_{\tau} = F/S$. Для малых деформаций сдвига оно оказывается пропорционально относительной деформации

$$\sigma_{\tau} = G\gamma ,$$

где коэффициент пропорциональности G называют модулем сдвига.

Если приложить к проволоке (рис. 2а) с радиусом сечения R и длиной l крутящий момент M , то она деформируется (рис. 2б) так, что угол поворота верхнего основания относительно нижнего будет равен α .

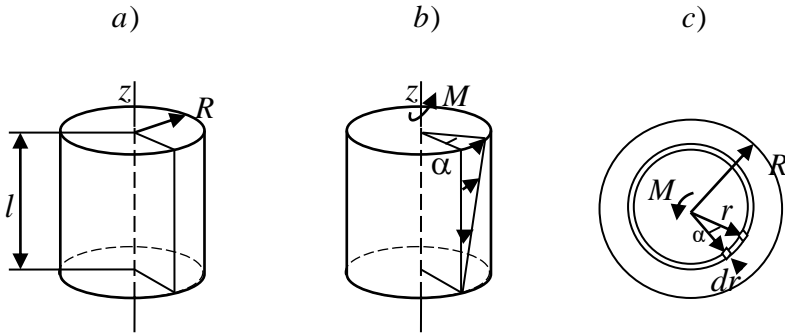


Рис. 2

В проволоке появятся деформации сдвига, возрастающие по мере удаления от оси (рис. 2с)

$$\gamma = \frac{\alpha r}{l} .$$

Вклад во вращающий момент напряжений в тонком слое радиуса r и толщиной dr (рис. 2с) будет равен:

$$dM = r(\sigma_{\tau}dS) = r \frac{G\alpha}{l} 2\pi r dr = \frac{2\pi G\alpha}{l} r^3 dr .$$

Общий вращающий момент получим после интегрирования по всему сечению проволоки:

$$M = \int_0^R \frac{2\pi G\alpha}{l} r^3 dr = \frac{\pi GR^4}{2l} \alpha .$$

Итак, момент, необходимый для скручивания проволоки на угол α пропорционален величине этого угла.

Для закрепления оси вращения маятника снизу к нему прикреплена и натянута вторая проволока так, что при его колебаниях верхняя и нижняя проволоки

закручиваются на один и тот же угол. Сделаны они из одного материала одинакового диаметра, поэтому суммарный момент будет равен:

$$M = M_1 + M_2 = \frac{\pi GR^4}{2l_1} \alpha + \frac{\pi GR^4}{2l_2} \alpha = \frac{\pi GR^4}{2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \alpha = f\alpha \quad (2)$$

$$f = \frac{\pi GR^4}{2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \quad (3)$$

Здесь l_1 - длина проволоки верхнего подвеса, l_2 - длина проволоки нижнего подвеса.

При подстановке (2) в уравнение вращения груза (1) следует учесть, что момент, закручивающий проволоку и момент, с которым проволока действует на груз, имеют противоположные знаки. С учетом $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ получаем

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + f\alpha = 0.$$

Здесь I - осевой момент инерции маятника. После деления на момент инерции, получим уравнение гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{f}{I}}$ - циклическая частота крутильных колебаний нашего маятника.

Период этих колебаний равен $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}$

Момент инерции маятника равен сумме момента инерции рамки со штангой I_0 и моментов инерции грузов I_1 и I_2 относительно оси вращения.

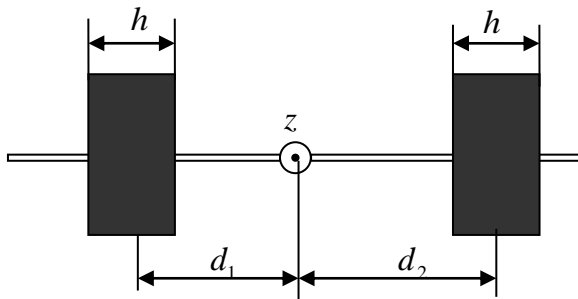


Рис.3

Моменты инерции грузов могут быть вычислены по теореме Штейнера $I_1 = md_1^2 + I_C$ и $I_2 = md_2^2 + I_C$, где d_1 и d_2 - расстояния от центров грузов до оси вращения, m - масса груза, а I_C - его момент инерции относительно центральной оси:

$$I = I_0 + 2I_C + md_1^2 + md_2^2. \quad (4)$$

Квадрат периода колебаний маятника оказывается линейной функцией суммы квадратов удаления центров масс грузов от оси вращения $d_1^2 + d_2^2$:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{f} = \frac{4\pi^2 m}{f} (d_1^2 + d_2^2) + \frac{4\pi^2 m}{f} (2I_C + I_0) = a(d_1^2 + d_2^2) + b \quad (5)$$

Определив угловой коэффициент $a = \frac{4\pi^2 m}{f}$ этой линейной зависимости, зная

массу грузов m , длины l_1, l_2 и диаметр $D = 2R$ проволоки подвесов, можем определить модуль сдвига материала, из которого они сделаны:

$$G = \frac{8\pi l_1 l_2 m}{aR^4 (l_1 + l_2)} = \frac{128\pi l_1 l_2 m}{aD^4 (l_1 + l_2)}. \quad (6)$$

УСТАНОВКА



Установка содержит проволочный подвес, на котором находится рамка со штангой для крепления грузов, и электронный секундомер со световым барьером для измерения периода колебаний. Дополнительный электромагнит позволяет задавать начальное положение рамки. На штангу нанесены риски с шагом 1 см, которые могут использоваться для выравнивания положения грузов. Масса каждого груза $m = 200 \pm 1$ г, толщина $h = 20,0 \pm 0,1$ мм.

Период колебаний измеряется с помощью встроенного цифрового секундомера, работающего от светового барьера – расположенных напротив друг друга источника света и фотоприемника. Поскольку при колебаниях груза световой поток перекрывается дважды за период, на счетчик секундомера поступает только каждый второй импульс с фотоприемника.

Для уменьшения погрешности установка позволяет измерять

длительность не одного, а нескольких периодов колебаний. Левый индикатор секундомера показывает число периодов колебаний, правый – их суммарную продолжительность. Если необходимо измерить, например, длительность десяти колебаний, то после появления на левом индикаторе девятки, следует нажать кнопку СТОП на лицевой панели. В этом случае работа счетчика прекратится с окончанием десятого периода.

Порядок работы

1. Установите грузы вблизи центра штанги так, чтобы наружные края грузов находились на ближайших к оси рисках.
2. Установите электромагнит на угол, примерно равный 90° .
3. Выключите питание электронного секундомера.
4. Измерьте расстояния d_1 и d_2 от центров грузов до оси вращения, запишите результаты в таблицу 1.

$d_1, м$	$d_2, м$	N	$t, с$	$T=t/N, с$	$X=d_1^2 + d_2^2$	$Y=T^2$

5. Включите питание электромагнита, переведя кнопку ПУСК в выдвинутое положение. Поверните рамку так, чтобы она зафиксировалась электромагнитом, нажмите кнопку СБРОС на электронном секундомере и затем кнопку ПУСК. После прохождения маятником светового барьера секундомер начнет отсчет времени и счет периодов. Для повышения точности рекомендуется измерять длительность не одного, а 10-20 колебаний. Дождавшись показаний счетчика периодов колебаний на 1 меньше, чем желаемое, следует нажать кнопку СТОП. После завершения колебания счет времени прекратится. Запишите в протокол число колебаний N и показания секундомера t .
6. Повторите измерения пп. 4-5 для 8-10 различных положений грузов, каждый раз последовательно отодвигая грузы к краям штанги на 1-2 см.

Обработка результатов

1. Вычислите T , X и Y в таблице 1. Постройте график $Y(X)$, убедитесь, что зависимость имеет линейный характер $Y = aX + b$.
2. Методом парных точек определите угловой коэффициент a ; используйте для вычислений таблицу 2

i	j	X_i	X_j	Y_i	Y_j	$a_{ij} = \Delta Y / \Delta X$	$a_{ij} - \langle a \rangle$	$(a_{ij} - \langle a \rangle)^2$

3. Найдите среднее значение $\langle a \rangle$ и его погрешность. По формуле (6) вычислите модуль сдвига материала проволоки и оцените его погрешность.
4. Определите погрешность результата косвенных измерений G по формуле:

$$\delta G = \sqrt{(\delta m)^2 + (\delta a)^2 + (4\delta D)^2 + (l_2 \delta l_1 / (l_1 + l_2))^2 + (l_1 \delta l_2 / (l_1 + l_2))^2} .$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Почему момент инерции сплошного цилиндра меньше момента инерции трубы такой же массы и такого же радиуса?
2. В каких единицах измеряется крутильная жесткость?
3. В результате смещения грузов к краям штанги, момент инерции маятника увеличился в 2 раза. Как изменился период колебаний?
4. Почему возвращающий момент остается пропорционален углу поворота даже при больших значениях этого угла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики // Учебн. пособие, М., Академия, 2007, С. 720.
2. Савельев И.В. Курс физики // Учебн. пособие, СПб., Лань, 2007, т.1, С. 350
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики // Учебн. пособие в 5 т. М., ФИЗМАТЛИТ, Изд-во МФТИ, 2002. Т. 1 Механика, С. 560
4. Б.Д. Агапьев, В.Н. Белов, Ф.П. Кесаманлы и др., Обработка экспериментальных данных. Учебное пособие, СПб, СПбГПУ, 2002.