Лабораторная работа 2.07 (б)

Исследование вынужденных колебаний в колебательном контуре

R1 = 75 Ом

L2 = 100 мГн

Работа ФПЭ-II. ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

<u>Цель работы</u>: изучение зависимости тока в колебательном контуре от частоты источника ЭДС, включенного в контур, и измерение резонансной частоты контура.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим процессы, протекающие в колебательном контуре, подключенном к источнику, ЭДС которого изменяется по гармоническому закону:

$$E = E_0 \cos \Omega t \ , \qquad \text{(II.I)}$$

где V – напряжение на конденсаторе емкостью C ; I – ток в контуре.

Полагаем, что мгновенные значения токов и напряжений удовлетворяют законам, установленным для цепей постоянного тока. Такие токи называются квазистационарными. В любой момент времени сумма падений напряжения на элементах цепи равна ЭДС (рис. II.I):

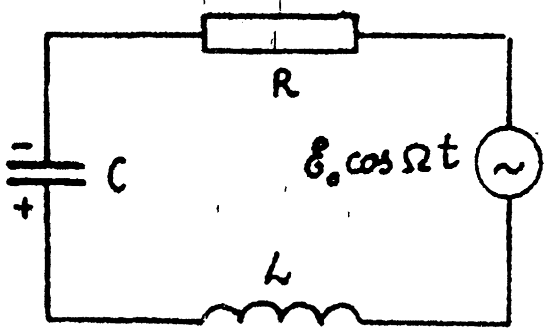

Рис. II.I

$$V_L + IR + V = E \cos \Omega t \ . \qquad \text{(II.2)}$$

Падение напряжения на катушке индуктивностью L

$$V_L = -E_i = L \frac{dI}{dt} \ , \qquad \text{(II.3)}$$

ток в катушке и в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C \frac{dV}{dt} \ . \qquad \text{(II.4)}$$

Подстановка (II.3) и (II.4) в (II.2) дает

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V = E_0 \cos \Omega t \ . \qquad \text{(II.5)}$$

Разделим это уравнение на LC и введем обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \ ; \qquad \beta = \frac{R}{2L} \ .$$

Обозначая дифференцирование по времени точкой, получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{V} + 2\beta \dot{V} + \omega_0^2 V = E_0 \omega_0^2 \cos \Omega t \ . \qquad \text{(II.6)}$$

Его решение дает закон изменения напряжения на конденсаторе с течением времени и равно сумме полного решения однородного уравнения (II.7) и частного решения уравнения (II.6):

$$\ddot{V} + 2\beta \dot{V} + \omega_0^2 V = 0 \ . \qquad \text{(II.7)}$$

Однородное уравнение (II.7) имеет решение

$$V_1 = V_{10}\, e^{-\beta t} \cos \omega t \quad , \tag{II.8}$$

являющееся уравнением затухающих колебаний (см. лабораторную работу ФПЭ-10). Затухание определяется членом $e^{-\beta t}$. За время $t = \frac{1}{\beta}$ амплитуда колебаний уменьшится в e раз. Затухание в колебательном контуре связано с превращением энергии колебаний в джоулево тепло в сопротивлении R. При $t \gg \frac{1}{\beta}$ составляющая V_1 решения уравнения (II.6) исчезнет, следовательно, она отражает переходный процесс, определенный начальными условиями и параметрами контура. Установившиеся колебания в цепи происходят с частотой Ω и возможным сдвигом по фазе. Поэтому решение ищут в виде

$$V = V_0 \cos(\Omega t + \varphi) \quad , \tag{II.9}$$

где V_0 и φ подлежат определению.

Подстановка (II.9) в (II.6) дает:

$$V_0 = \frac{E_0\, \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} ; \tag{II.10}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} . \tag{II.11}$$

Таким образом, амплитуда и фаза напряжения на конденсаторе зависят от соотношения частоты источника ЭДС Ω и частоты ω_0.

Ток в контуре $I = C\frac{dV}{dt} = -C\Omega V_0 \sin(\Omega t + \varphi) = I_0 \cos(\Omega t + \varphi_1)$, где $\varphi_1 = \varphi + \pi/2$. Амплитуда тока в контуре также зависит от соотношения частот Ω и ω_0:

$$I_0 = \frac{E_0\, C\, \omega_0^2\, \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} . \tag{II.12}$$

График зависимости I_0 от Ω/ω_0 представлен на рис. II.2.

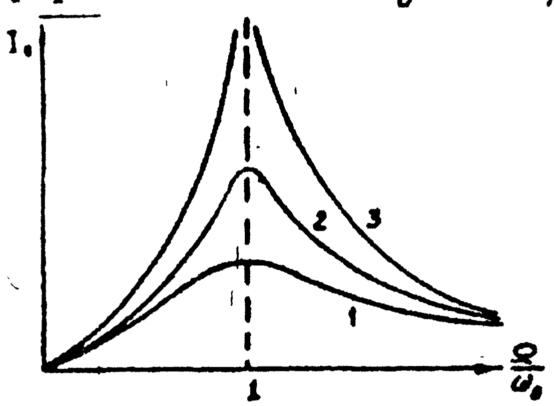

Рис. II.2

Из графика видно, что амплитуда тока резко возрастает при приближении циклической частоты Ω источника ЭДС к частоте ω_0. Это явление называется резонансом, а кривые – резонансными кривыми. Величина максимума зависит от β: при $\beta = 0$ $I_{0m} \to \infty$ (кривая 3); при увеличении β максимальное значение I_{0m} уменьшается (кривые 2 и I), φ_1 определяет разность фаз колебаний тока в контуре и внешней ЭДС:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\omega_0^2-\Omega^2}{2\beta\Omega}. \qquad (II.13)$$

График зависимости φ_1 от частоты представлен на рис. II.3. Кривые I и 2 соответствуют разным значениям β. При $\omega_0 = \Omega$ $\operatorname{tg}\varphi_1 = 0$ и $\varphi_1 = 0$.

Величина $Q = \dfrac{\omega}{2\beta}$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$, называется добротностью колебательного контура. Добротность контура связана с остротой резонансных кривых. Найдем ширину резонансной кривой на высоте (рис. II.4).

$I_0 = \dfrac{I_{0m}}{\sqrt{2}}$.

Из формулы (II.12) следует, что максимальное значение тока

$$I_{0m} = \frac{E_0 C\omega_0^2}{2\beta}, \text{ а}$$

$$I_0 = \frac{2\beta\Omega I_{0m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}. \qquad (II.14)$$

При $I_0 = I_{0m}/\sqrt{2}$ формула (II.14) запишется

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\beta\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}. \qquad (II.15)$$

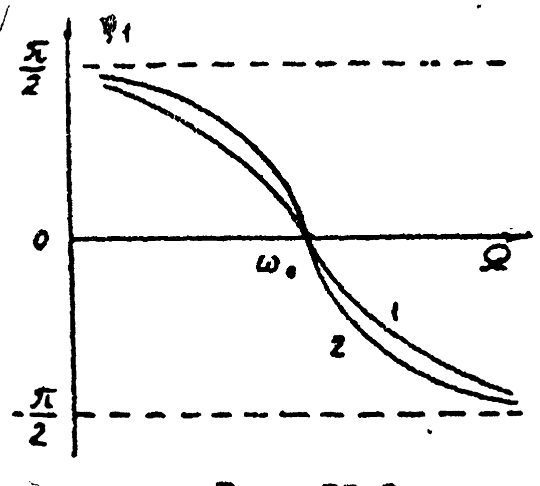

Рис. II.3

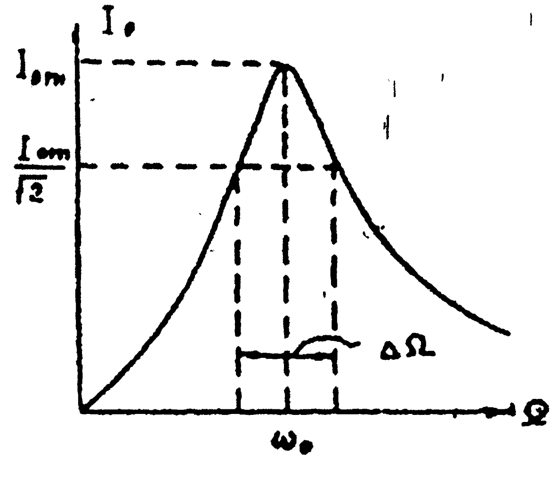

Рис. II.4

Выражение (II.15) можно преобразовать к виду $2\beta\Omega = \omega_0^2-\Omega^2$ или $2\beta\Omega = (\omega_0-\Omega)(\omega_0+\Omega)$. Величина $\omega_0-\Omega = \dfrac{\Delta\Omega}{2}$, а вблизи резонанса $\omega_0 \approx \Omega$. После подстановки получим $\Delta\Omega = 2\beta$:

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega_0} = \frac{2\beta}{\omega_0} \approx \frac{1}{Q}. \qquad (II.16)$$

При малом затухании $\beta \ll \omega_0$ и $\omega \approx \omega_0$ относительная ширина резонансной кривой численно равна величине обратной добротности контура.

Если известны параметры контура, добротность может быть рассчитана по соотношению

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \ . \qquad (II.16a)$$

ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Содержанием работы является изучение резонанса в последовательной цепи RCL. Принципиальная электрическая схема лабораторной установки приведена на рис. II.5.

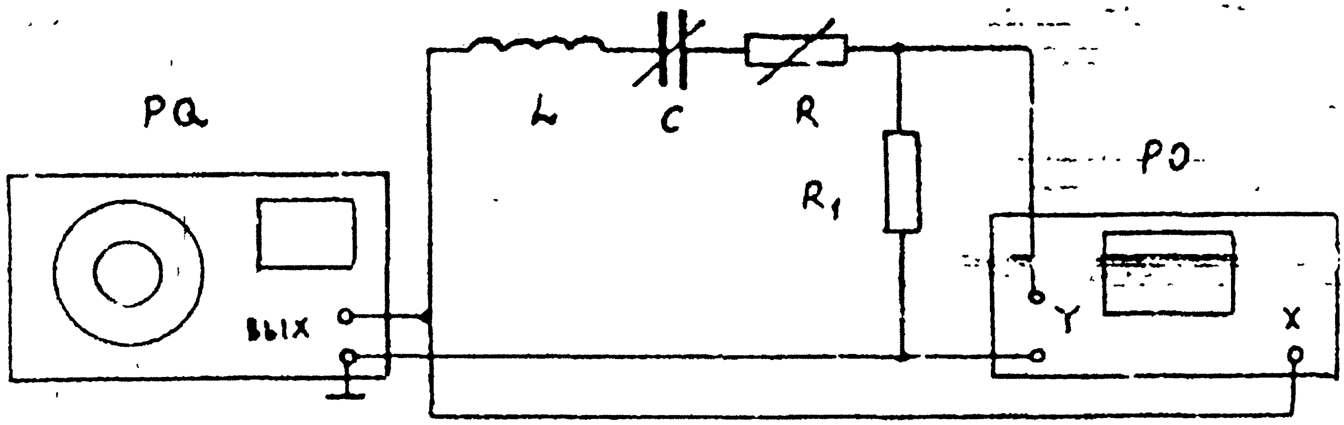

Рис. II.5

Колебательный контур состоит из катушки L, магазина емкостей C, переменного сопротивления R и сопротивления R_1. Напряжение на сопротивлении R_1, пропорциональное току в контуре, подается на вход Y электронного осциллографа. Для снятия резонансных кривых, изменяя частоту звукового генератора PQ, определяют зависимость $I_0 = f(\Omega)$ при различных сопротивлениях контура R.

Для измерения сдвига фаз φ_1 можно использовать фигуры Лиссажу, получаемые на экране осциллографа. Пусть имеются два синусоидальных напряжения одинаковой частоты Ω. Подадим эти напряжения на вертикальные и горизонтальные пластины осциллографа. Смещение луча под действием этих напряжений пропорционально напряжению и по горизонтали $x = x_0 \sin \Omega t$, а по вертикали $y = y_0 \sin(\Omega t + \varphi)$, где φ - сдвиг фаз между напряжениями; x_0 и y_0 - амплитуды смещения луча, пропорциональные амплитудам напряжения и коэффициентам усиления соответствующих каналов осциллографа. Исключив время, получим

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0}\cos\varphi = \sin^2\varphi \ . \qquad (II.17)$$

Выражение (II.17) - уравнение эллипса, описываемого электронным лучем на экране осциллографа. Выберем коэффициенты усиления вертикального и горизонтального каналов осциллографа такими, чтобы $x_0 = y_0$. В этом случае

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi = x_0^2 \sin^2\varphi \ . \qquad (II.18)$$

Уравнение (II.I8) – уравнение эллипса, оси которого составляют угол $\frac{\pi}{4}$ с осями координат. При $\varphi = 0$ эллипс вырождается в прямую $y = x$, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – в круг радиуса x_0. Для точки M эллипса (рис.II.6) $y = x$, следовательно, $a^2 = x^2 + y^2 = 2x^2$, а уравнение (II.I8) для этой точки примет вид:

$$2x^2 - 2x^2 \cos\varphi = x_0^2 \sin^2\varphi \;;$$

$$2x^2(1 - \cos\varphi) = x_0^2 \sin^2\varphi \;;$$

$$a^2 \cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = x_0^2 \cdot 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} \;;$$

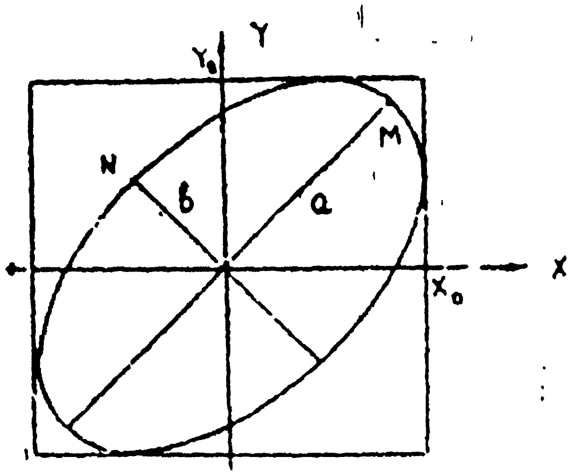

Рис. II.6

отсюда

$$a^2 = 2x_0^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}\,. \qquad (II.I9)$$

Аналогично для точки N эллипса (см.рис.II.6), где $y = -x$, получим

$$b^2 = 2x_0^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\,. \qquad (II.20)$$

Из выражений (II.I9) и (II.20) получим

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}\,. \qquad (II.2I)$$

Таким образом, для измерения сдвига фаз между напряжениями одинаковой частоты достаточно измерить полуоси a и b эллипса, вписанного в квадрат на экране осциллографа. При $\varphi = 0$ эллипс вырождается в прямую, что позволяет по фигурам Лиссажу установить момент наступления резонанса. Для получения фигур Лиссажу на вход " Y " осциллографа (см. рис. II.5) подается напряжение с сопротивления R_1, пропорциональное току, а на вход " X " – напряжение со звукового генератора.

ПРИБОРЫ И ОБОРУДОВАНИЕ

На рис. II.7 дана электрическая схема:

PQ – звуковой генератор; PO – электронный осциллограф; ФПЭ-II – модуль; МС – магазин сопротивлений; МЕ – магазин емкостей.

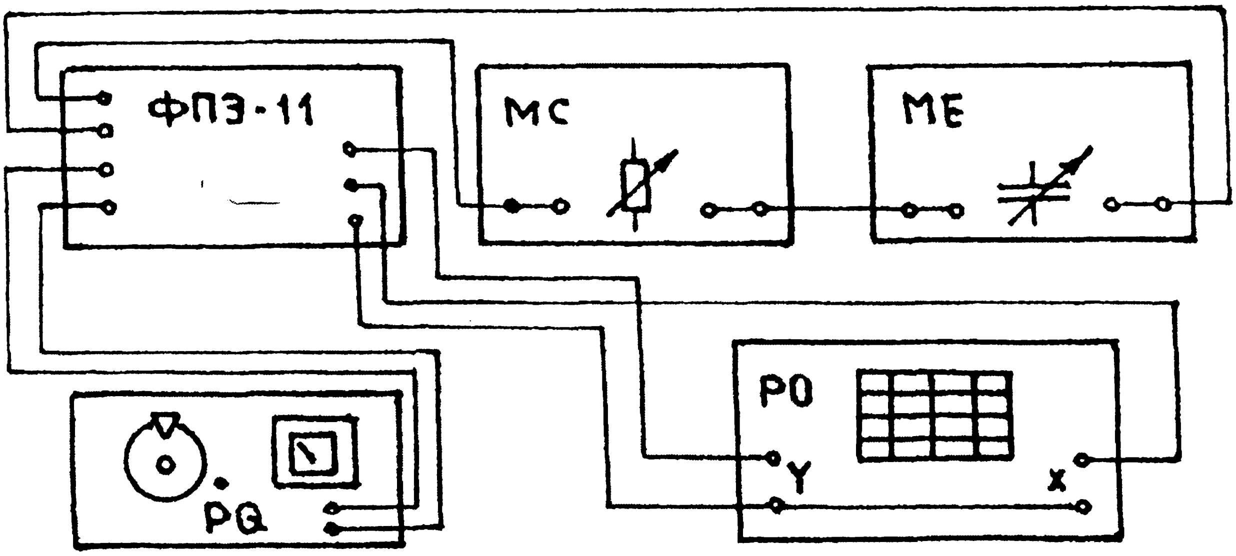

Рис. II.7

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Собрать электрическую схему (рис. II.8): МС и МЕ – магазины сопротивлений и емкостей, собранные в отдельных модулях установки; ФПЭ-II – модуль для изучения вынужденных колебаний в колебательном контуре; *PQ* – звуковой генератор; *PO* – осциллограф.

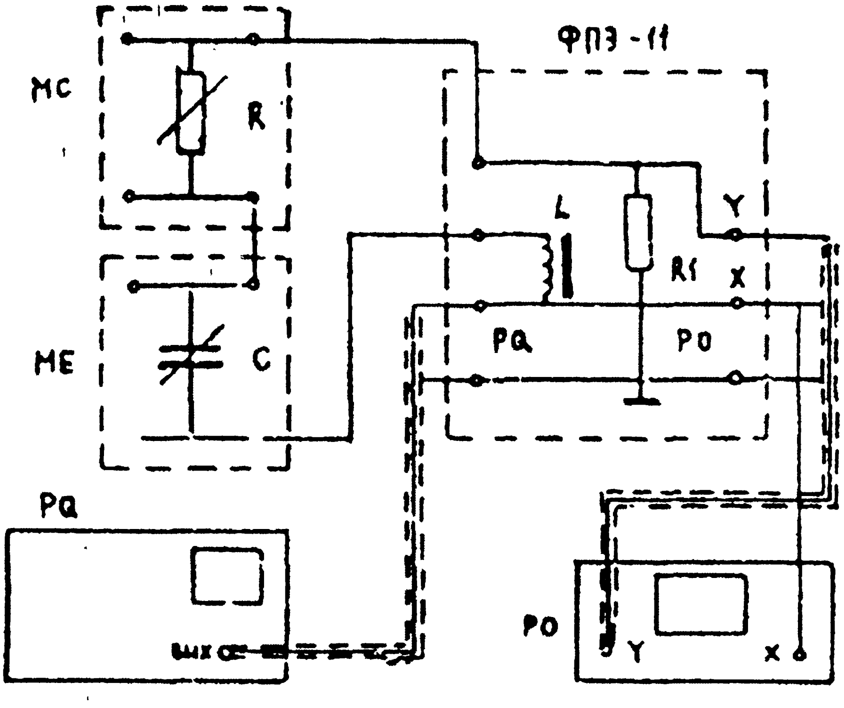

Рис. II.8

Задание I. Снятие резонансных кривых

I. Установить переключателями магазина емкостей $C = 3\cdot 10^{-3}$ мкФ и переключателями магазина сопротивлений $R = 0$.

2. Используя приблизительное значение индуктивности $L = 100$ мГн, рассчитать резонансную частоту контура по формуле $f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

3. Ознакомиться с работой звукового генератора и электронного осциллографа в режиме измерения амплитуды синусоидального напряжения и получения фигур Лиссажу.

4. Подготовить приборы к работе:

а) установить следующие параметры выходного напряжения звукового генератора: частота – 2 кГц, величина напряжения – до I В;

б) включить развертку электронного осциллографа с запуском от усилителя У и установить частоту развертки, удобную для наблюдения сигналов частотой 2-I6 кГц;

в) усиление по оси У электронного осциллографа установить таким, чтобы было возможно измерять переменные напряжения до I В.

5. Включить лабораторный стенд и приборы. Напряжение звукового генератора установить равным 0,8 В. Это значение при всех измерениях в упражнении I поддерживать неизменным. Получить на экране осциллографа устойчивое изображение синусоиды. Измерить амплитуду синусоидального напряжения в вольтах. Результаты измерения записать в табл. II.I.

Таблица II.I

f, кГц									
U_0, В									
I_0, мА									

6. Измерить амплитуды при других частотах в диапазоне от 2 до I6 кГц. Частоту изменять с интервалом I-2 кГц, вблизи резонанса (в пределах $f \pm$ I кГц) с интервалом 0,2 кГц.
Результаты измерений занести в табл. II.I.

7. Рассчитать амплитуду тока в колебательном контуре по формуле $I_0 = \frac{U_0}{R_1}$, где R_1 – значение, указанное на модуле.

Расчет провести для каждого значения частоты, результаты вычислений записать в табл. II.I в миллиамперах.

8. Установить сопротивление магазина R = 500 Ом. Провести измерения (п. 5-7), результаты записать в таблицу.

9. Снять резонансную кривую (п. 5-7) при R = 3000 Ом.

10. Построить на одном чертеже графики зависимостей I_0 от f.

II. По графикам при R = 0 и R = 500 Ом найти ширину резонансной кривой Δf (см. рис. II.5) и рассчитать значения добротности контура по формуле $Q \approx \frac{f_p}{\Delta f}$.

Задание 2. Определение зависимости резонансной частоты от емкости С

1. Установить сопротивление $R = 0$, емкость $C = 1 \cdot 10^{-3}$ мкФ.

2. Включить развертку осциллографа. На экране осциллографа наблюдать эллипс (см. рис. II.6). Изменяя частоту звукового генератора, добиться превращения эллипса в прямую, расположенную примерно под углом 45° к оси X. При необходимости изменять усиление усилителя У. При этом частота звукового генератора равна резонансной частоте f_p

3. Значения f_p и С записать в табл. II.2.

4. Привести измерения f_p (п. 2 и 3) при других значениях С от $1 \cdot 10^{-3}$ до $10 \cdot 10^{-3}$ мкФ с интервалом $1 \cdot 10^{-3}$ мкФ.

5. Вычислить значения $Z = \frac{1}{(2\pi f_p)^2}$ и построить график зависимости Z от C, который должен представлять собой прямую линию, проходящую через начало координат.

Таблица II.2

$C \cdot 10^9$, Ф									
f_p, кГц									
Z									

При построении графика следует учесть следующее. Точность значений емкостей, устанавливаемых на магазине емкостей, составляет 5%. Поэтому на графике следует изобразить пределы, в которых известно данное значение С так, как показано на рис. II.9. Затем следует провести прямую, не выходящую за нижние границы С (прямая I), и прямую, не выходящую за верхние границы (прямая 2). В этих пределах должна располагаться истинная зависимость $Z = f(C)$

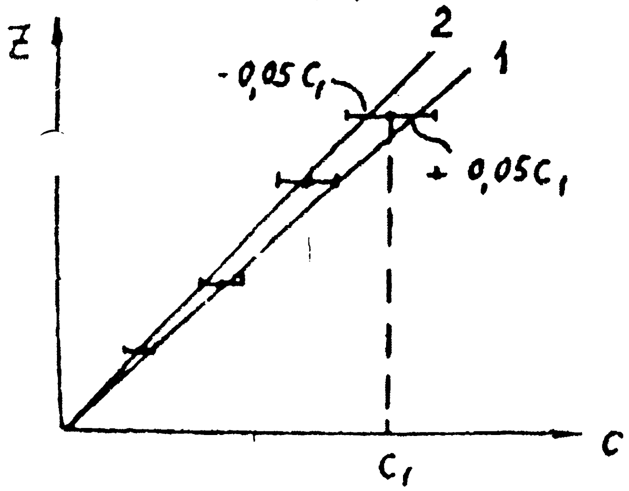

Рис. II.9

6. Рассчитать значение индуктивности катушки как тангенс угла наклона прямых на графике $Z = f(C)$

$$L = \frac{\Delta Z}{\Delta C}; \qquad L_{cp} = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

Оцените погрешность определения L:

$$\delta = \frac{\Delta L}{L_{cp}} = \frac{L_2 - L_{cp}}{L_{cp}}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Выведите формулу зависимости амплитуды тока в колебательном контуре от частоты внешней ЭДС.

2. Выведите формулу для вычисления сдвига фаз с помощью фигур Лиссажу.

3. Что такое резонанс?

4. Что такое добротность колебательного контура?

5. Покажите, что резонанс токов наступает при частоте внешней ЭДС $\Omega = \omega_0$.

Литература: [1], гл.XIII; [4]; [3], гл.X.