1.10. Закон сохранения энергии. Границы движения.

1.10.1. Полная механическая энергия в потенциальном поле.

Рассмотрим движение материальных точек или тел в силовом потенциальном поле. В § 1.7 было показано, что при перемещении из точки 1 в точку 2 работа силового поля равна изменению кинетической энергии K:

$$A_{12}=\frac{1}{2}mV_2^2-\frac{1}{2}mV_1^2=K_2-K_1 \qquad (1.10.1)$$

Здесь V_1, V_2 – скорости тела массы m в точках 1 и 2. С другой стороны, для консервативных сил работа равна “уменьшению” потенциальной энергии силового поля:

$$A_{12}=U_1-U_2 \qquad (1.10.2)$$

Откуда получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{2}mV_2^2-\frac{1}{2}mV_1^2=U_1-U_2 \qquad (1.10.3)$$

Для любого числа частиц (т.е. любой системы), находящихся в поле консервативных сил, выполняется это равенство:

$$K_2-K_1=U_1-U_2$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий называется *полной энергией:*

$$E=K+U \qquad (1.10.4)$$

Таким образом, получаем *закон сохранения полной механической энергии:*

$$E_1=E_2 \qquad (1.10.5)$$

или

$$E=const$$

В системе с одними консервативными (и гироскопическими) силами полная энергия остается постоянной. В такой системе могут лишь происходить превращения потенциальной энергии в кинетическую энергию и обратно.

1.10.2. Система с диссипативными силами.

Пусть в системе наряду с консервативными силами действуют диссипативные силы (например, силы трения). Тогда работа всех сил при перемещении из точки 1 в точку 2, по-прежнему, равна изменению кинетической энергии. Разделим всю работу на две части: на работу консервативных и диссипативных сил:

$$A_{12}=A_{12}^{кон}+A_{12}^{дисс}=K_2-K_1 \qquad (1.10.6)$$

Работу консервативных сил можно записать через изменение потенциальной энергии поля:

$$A_{12}^{кон}=U_1-U_2 \qquad (1.10.7)$$

Тогда получаем следующий *закон изменения полной энергии*:

$$K_2-K_1=U_1-U_2+A_{12}^{дисс}$$

$$E_2-E_1=A_{12}^{дисс} \qquad (1.10.8)$$

Таким образом, в системе с *диссипативными силами полная механическая энергия не остается постоянной*, а уменьшается, так как работа диссипативных сил отрицательна.

1.10.3. Границы движения.

Для простоты рассмотрим одномерное движение, при котором движение материальной точки осуществляется таким образом, что она может перемещаться только вдоль определенного направления (в частности, вдоль прямой). Положение точки задается одной координатой x, отсчитываемой вдоль этой траектории.

При движении в поле консервативных сил имеем кинетическую $K(V)$ и потенциальную $U(x)$ энергии и при этом выполняется закон сохранения энергии:

$$E=\frac{mV^2}{2}+U(x)=const \qquad (1.10.9)$$

Поскольку кинетическая энергия всегда больше 0 ($K\geq 0$), тогда полная энергия $E\geq U(x)$. То есть частица может находиться только в той области пространства, где потенциальная энергия не превосходит величины полной энергии. Точки, в которых выполняется равенство полной энергии и потенциальной, а кинетическая энергия равна нулю

$$E = U(x) \tag{1.10.10}$$

служат для определения границ области пространства, где может происходить движение материальной точки.

Определение: Движение, при котором частица остается в конечной области пространства, называется *финитным движением*.

Пример 1. Потенциальная энергия $U(x)$ материальной точки в зависимости от координаты изображена на рис. 10.1. Прямая линия постоянной энергии $E = const$ пересекает $U(x)$ в двух точках x_1 и x_2. Так как движение возможно только при условии $E \geq U(x)$, то точки x_1 и x_2, называемые *точками поворота*, определяют границы движения. В этих точках полная энергия $E = U(x)$, а кинетическая энергия равна нулю $K = 0$, то есть частица не движется. При движении внутри области меняются кинетическая и потенциальные энергии, при этом минимальная потенциальная энергия и максимальная кинетическая энергия достигаются в точке $x = x_0$. Справа от точки x_0 сила действует против оси x, т.е. в сторону x_0, а слева – вдоль оси x, т.е. опять к точке x_0. Это пример *колебательного (осцилляторного) движения*. Чем больше (выше) полная энергия, тем больше (шире) область движения точки, т.е. тем больше амплитуда колебаний.

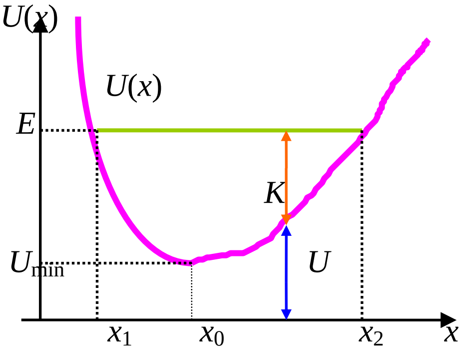

Рис. 10.1.

Положение равновесия определяется точкой, где сила равна 0:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 = F \tag{1.10.11}$$

Когда в этой точке имеем минимум потенциальной энергии – положение равновесия устойчивое, когда максимум – неустойчивое положение равновесия.

Пример 2. Рассмотрим более сложный вид зависимости потенциальной энергии от координаты, изображенный на рис. 10.2. При этом имеем два случая.

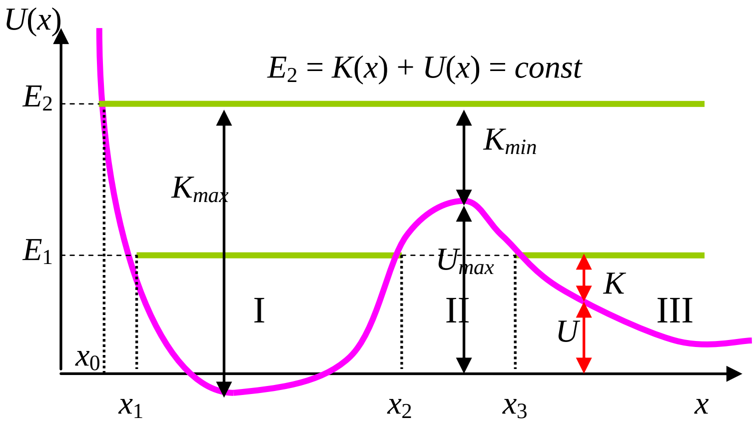

Рис. 10.2.

1). Рассмотрим движение частицы с энергией $E = E_1$. Движение частицы возможно только в областях I и III, т.к. только здесь $E \geq U(x)$. Движение в области I, как и в случае примера 1, носит финитный (колебательный) характер.

Движение в области III имеет другой характер. Если частица начинала свое движение из точки x_3, то вследствие того, что $dU/dx < 0$ и сила $F > 0$ (т.е. сила действует направо по оси x), то частица будет двигаться направо с ускорением и уйдет на бесконечность. Причем на бесконечности, где потенциальная энергия равна 0, ее скорость определяется соотношением:

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}} \tag{1.10.12}$$

Если частица первоначально двигалась справа налево, то в окрестности точки она движется с замедлением, в точке $x = x_3$ она остановится, повернет и пойдет обратно на бесконечность. Такое движение носит название – *инфинитное движение*.

Движение в области II запрещено для частицы с энергией E_1, поэтому переход из области I в область III (и наоборот) запрещен в классической механике. В этом случае говорят, что область II – *потенциальный барьер*, а область I – *потенциальная яма*.

2). В случае, когда полная энергия $E = E_2$, (см рис. 10.2) частица, идущая из бесконечности, проходит над потенциальным барьером до точки x_0 и отразившись снова уйдет на бесконечность. Она совершает инфинитное движение. Из бесконечности частица движется с переменной скоростью. Сначала до вершины потенциального барьера частица движется с замедлением, проходит вершину барьера с минимальной скоростью (там, где потенциальная энергия достигает локального максимума), затем ускоряется над скатом потенциальной ямы при уменьшении x, проходит минимум ямы с максимальной скоростью (K_{max}) и снова замедляет свое движение до скорости, равной 0 в точке x_0. Аналогично рассматривается ее движение в обратную сторону от точки x_0 на бесконечность.

1.10.4. Излучение квантов. Эффект Мессбауэра.

Рассмотрим *эффект Мессбауэра* как иллюстрацию законов сохранения энергии и закона сохранения импульса. Согласно квантово–механическим представлениям атомные ядра (или атомы) имеют дискретные уровни энергии. Если ядро (атом) находится в возбужденном состоянии 2, то затем система переходит в нижнее состояние 1 с испусканием γ кванта энергии.

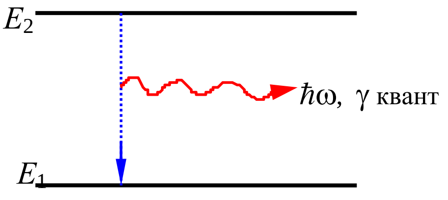

Рис. 10.3.

Из закона сохранения энергии без учета движения ядра имеем:

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_0 \tag{1.10.13}$$

где ω_0 – частота фотона, определяемая разностью энергий уровней, $\hbar$ – постоянная Планка. Однако атом в газе может двигаться, поэтому закон сохранения энергии должен учитывать кинетическую энергию атомов в начальном 1 и конечном 2 состоянии:

$$\left(\frac{p_2^2}{2M} + E_2\right) - \left(\frac{p_1^2}{2M} + E_1\right) = \hbar\omega \tag{1.10.14}$$

где ω – частота фотона с учетом движения атома, M – масса атома. Закон сохранения импульса для такого процесса имеет вид:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \hbar\vec{k} \tag{1.10.15}$$

Здесь в правой части стоит импульс фотона: $\vec{k}$ – *волновой вектор* фотона, его модуль – *волновое число* – обратно пропорционален длине волны фотона λ:

$$\left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \tag{1.10.16}$$

где c – скорость фотона (света). Выразим $\vec{p}_2$ из (1.10.15) и подставим в (1.10.16):

$$E_2 - E_1 + \frac{\left(\hbar\vec{k} + \vec{p}_1\right)^2}{2M} - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2M} = \hbar\omega$$

Т.к. масса атома M велика, а фотон безмассовая частица, то импульс фотона мал $\hbar k << p$ или $\hbar^2k^2/2M << p^2/2M$. Тогда раскрывая скобки и пренебрегая квадратом фотонного импульса, имеем:

$$E_2 - E_1 + \frac{\hbar\cdot\left(\vec{k},\vec{p}_1\right)}{M} = \hbar\omega \tag{1.10.17}$$

Итак, величина $\hbar\left(\vec{k},\vec{p}_1\right)/M$ зависит от скорости атома в конечном состоянии и описывает *энергию отдачи* атома при испускании γ - кванта. В газовой среде атомы могут быть с разными скоростями (по величине и по направлению), поэтому из-за скалярного произведения $\left(\vec{k},\vec{p}_1\right)$ отдельный атом получает различную отдачу. Таким образом, атомы (или ядра) излучают различные по энергии кванты, поэтому спектр выглядит примерно так, как изображено на рисунке 10.4, где I – интенсивность (количество) излученных квантов.

Если зафиксируем импульс атома p_1, то тогда максимальные отклонения в энергии кванта определяются значениями косинуса ± 1: $\left(\hbar\vec{k}\vec{p}_1\right)_{max} = \pm\hbar k p_1$, т.е. из (1.10.17) и (1.10.13) получаем:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 \pm \frac{\hbar\omega p_1}{cM} \approx \hbar\omega_0 \pm \frac{\hbar\omega_0 p_1}{cM} = \hbar\omega_0\left(1 \pm \frac{p_1}{Mc}\right)$$

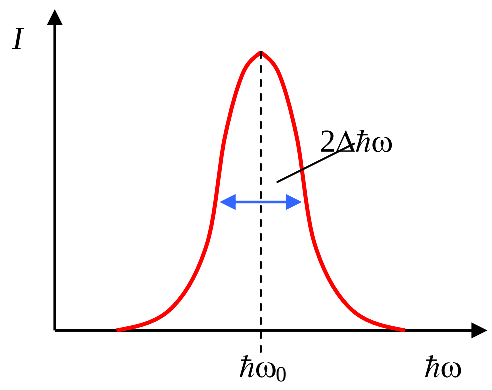

Рис. 10.4.

Вводя скорость атома в конечном состоянии $v_1 = p_1/M$, получаем для максимальных отклонений:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0\left(1 \pm \frac{v_1}{c}\right) \qquad (1.10.18)$$

Поэтому даже, если атомы в начальном состоянии имеют одну и ту же энергию, мы вместо определенной линии получаем уширение линии за счет отдачи атома и за счет его движения. Из (1.10.18) получаем оценку для относительного уширения линии за счет теплового движения атомов:

$$\frac{\hbar\omega - \hbar\omega_0}{\hbar\omega_0} = \frac{\Delta\hbar\omega_0}{\hbar\omega_0} \sim \frac{v}{c} \sim 10^{-4} \div 10^{-10} \qquad (1.10.19)$$

Минимальная цифра в оценке (1.10.19) получалась при очень низких температурах в газах. Несмотря на небольшое относительное уширение это ограничивало экспериментальные возможности спектроскопии при изучении очень близких энергетических уровней (когда близкие по энергии линии излучения перекрывались).

Идея Мессбауэра (1958 г.) состояла в том, чтобы уменьшить отдачу атома, поместив атомы в кристалл, где они практически неподвижны. При этом отдачу при испускании γ - кванта будет испытывать не отдельный атом с массой M, а весь кристалл в целом с огромной массой. Таким образом, в соотношении (1.10.16) слагаемое $\hbar\left(\vec{k},\vec{p}_1\right)/M_{кристалл} \to 0$ и ширина линии резко уменьшается (см рис. 10.5). В кристаллах относительное уширение достигает практически величины *естественной ширины* уровня возбужденного атома:

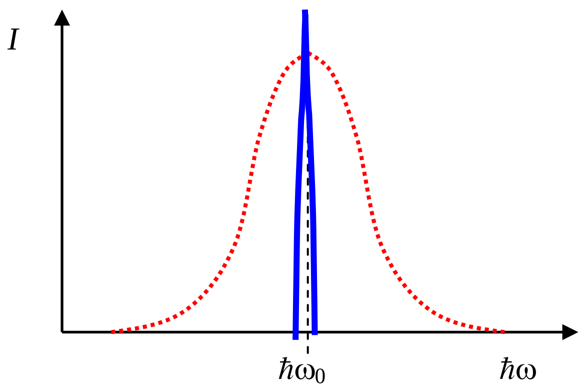

Рис. 10.5.

$$\frac{\Delta\hbar\omega}{\hbar\omega} \sim 10^{-15} \qquad (1.10.20)$$

Этот эффект открыл новые возможности в спектроскопии. Не только разрешать близкие по энергии линии в спектре, но и измерять малые смещения энергетических линий за счет взаимодействия атомов с окружением. В 1961 году Мессбауэр получил Нобелевскую премию за новую экспериментальную методику в измерении спектров.

Примечание 1. *Рудольф Людвиг Мессбауэр, немецкий физик, 1929 г.р., Нобелевская премия 1961 г. за открытие эффекта безотдачного гамма-резонанса*
