1.11. Момент импульса и момент силы.

1.11.1. Линейное и вращательное движения.

В кинематике между поступательным и вращательным движением имеем полное соответствие. Отличие состоит лишь в том, что векторы, определяющие вращательное движение, обладают немного другими свойствами, чем обычные. Это так называемые *аксиальные вектора*, которые определяются через векторные произведения обычных векторов. Вместо вектора элементарного перемещения вводится вектор малого поворота на угол $d\varphi$ через векторное произведение (см рис. 11.1 и ниже напоминание о векторном произведении векторов, а также Приложение 1 в конце параграфа). Итак, скорости и ускорение при вращении материальной точки вводим по аналогии с поступательным движением:

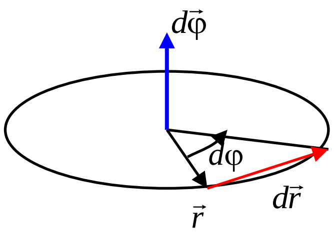

Рис. 11.1.

Перемещение $d\vec{r} \Leftrightarrow d\vec{\varphi}$, угол поворота $d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$ (1.11.1)

Скорость $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow \vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ угловая скорость $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ (1.11.2)

Ускорение $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ угловое ускорение (1.11.3)

Импульс $\vec{p} = m\vec{v} \Leftrightarrow \vec{L}$ момент импульса (1.11.4)

Определение: *Моментом импульса* материальной точки (МИ, или устаревшее название – *момент количества движения*) относительно точки 0 называется векторное произведение:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] \qquad (1.11.5)$$

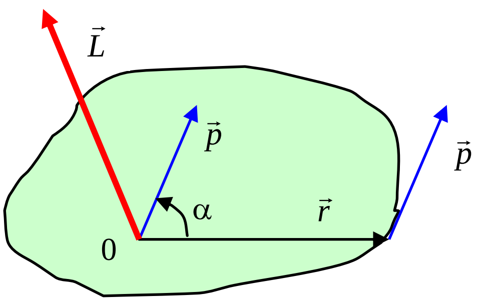

Рис. 11.2.

Следовательно, направление вектора МИ перпендикулярно плоскости, образуемой вектором импульса $\vec{p}$ (скорости) и радиус-вектором $\vec{r}$, и определяется по правилу «буравчика». Как показано на рис. 11.2, вращаем буравчик в направлении от первого вектора в квадратных скобках ($\vec{r}$) ко второму ($\vec{p}$), тогда поступательное движение буравчика дает направление результирующего вектора $\vec{L}$. По модулю вектор МИ равен:

$$L = mvr \cdot sin(\angle \vec{v}, \vec{r}), \qquad (1.11.6)$$

где величину «$r \cdot sin(\angle \vec{v}, \vec{r}) = r \sin\alpha = l$» обычно называют плечом вектора импульса относительно точки 0 (перпендикуляр, опущенный из точки 0 на направление вектора импульса).

МИ системы есть векторная сумма МИ каждой из частиц:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i] \qquad (1.11.7)$$

Т.е. момент импульса системы есть аддитивная величина.

1.11.2. Уравнение моментов.

Рассмотрим движение одной частицы под действием силы $\vec{F}$, тогда изменение МИ во времени равно:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{v}, \vec{p}] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = 0 + [\vec{r}, \vec{F}]$$

Первое векторное произведение в правой части уравнения равно нулю, т.к. вектор скорости параллелен вектору импульса. Таким образом, получаем уравнение, связывающее изменение момента импульса с действием силы – *уравнение моментов*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}] \qquad (1.11.8)$$

Вектор, стоящий в правой части уравнения, называется *моментом силы* относительно начала отсчета – точки 0:

$$\vec{M} \equiv [\vec{r}, \vec{F}] \qquad (1.11.9)$$

Формулировка полученного соотношения (1.11.8) звучит так: производная по времени от момента импульса материальной точки относительно неподвижного начала равна моменту действующей силы относительно того же начала.

Модуль вектора момента силы равен:

$$M = F r sin(\angle \vec{F}, \vec{r}) = F \cdot l \qquad (1.11.10)$$

где l плечо вектора силы F относительно точки 0. Итак, уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (1.11.11)$$

Уравнение моментов является записью основного уравнения динамики (второго закона Ньютона) для вращательного и криволинейного движения. Поясним геометрический смысл векторов $\vec{L}$ и $\vec{M}$, и вообще векторного произведения. Направление, как сказано выше, определяется с помощью правила правого винта («буравчика»). Величина вектора $|\vec{L}|$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}$ и $\vec{p}$ (рис. 11.3):

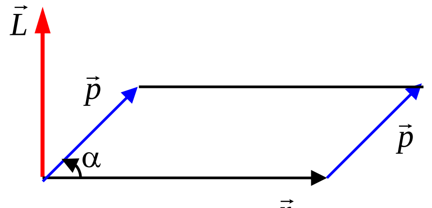

Рис. 11.3.

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot sin\,\alpha \qquad (1.11.12)$$

В самом деле, величина $|\vec{p}|\,sin\,\alpha$ дает высоту параллелограмма, а величина $|\vec{r}|$ его основание. То же можно сказать о векторе момента силы $\vec{M}$ (см (1.11.9) и (1.11.10)).

Уравнение моментов (1.11.11), как и основное уравнение динамики, позволяет решать задачи 2-х типов.

1). Известна зависимость МИ относительно точки 0, найти момент сил относительно той же точки 0. Задача решается дифференцированием.

2). Известна зависимость от времени момента сил, действующего на частицу относительно точки 0, найти приращение МИ этой частицы. Задача решается интегрированием:

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M}dt \qquad (1.11.13)$$

Если известна зависимость момента силы от параметров движения, например, угловой скорости, то тогда составляется дифференциальное уравнение, которое решается при заданных граничных и начальных условиях.

1.11.3. <u>Момент импульса и момент силы относительно оси</u>.

Уравнение моментов – векторное уравнение, то есть вместо уравнения (1.11.11) можно записать три уравнения для проекций:

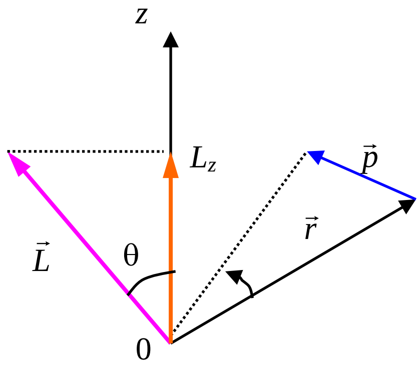

Рис. 11.4.

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z \qquad (1.11.14)$$

Нужно различать МИ относительно точки и относительно оси. Пусть ось z неподвижна и точка отсчета 0, относительно которой рассматриваются моменты, находится на этой оси. *Моментом импульса относительно оси* z называют проекцию вектора $\vec{L}$ на эту ось, который определен относительно произвольной точки 0 на данной оси (см рис. 11.4). Аналогично определяется и момент силы относительно оси.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \qquad (1.11.15)$$

Если $M_z = 0$, то проекция на ось z не меняется $L_z = const$, хотя сам вектор момента импульса может меняться. Например, вектор $\vec{L}$ может вращаться («прецессировать») вокруг оси при постоянном угле θ (см рис. 11.4).

Покажем, что проекции момента импульса и момента силы на ось вращения z не зависят от выбора точки 0 на оси z. Запишем вектора $\vec{r}$ и $\vec{p}$ в цилиндрической системе координат, в которой введем координатные оси $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ как показано на рис. 11.5. На рис. 11.5 показана траектория движения точки **A**, и вектор импульс, направленного по касательной к траектории. Радиус-вектор $\vec{r}$ точки **A** записывается:

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z\,, \qquad (1.11.16)$$

где ρ плечо (т.е. перпендикуляр, опущенный из точки A на ось z как показано на рис. 11.5). Вектор импульса имеет вид:

$$\vec{p} = p_\rho\vec{e}_\rho + p_\varphi\vec{e}_\varphi + p_z\vec{e}_z \qquad (1.11.17)$$

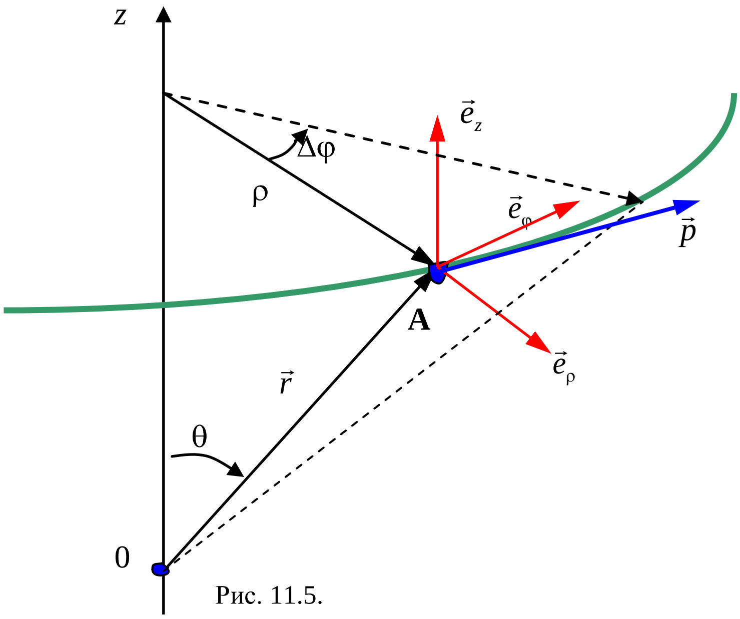

Рис. 11.5.

Проекция L_z определяется из векторного произведения следующим образом (см в конце параграфа Приложение 1):

$$L_z = r_\rho p_\varphi - r_\varphi p_\rho \qquad (1.11.18)$$

Но проекции радиус-вектора равны

$$r_\varphi = 0 \quad \text{и} \quad r_\rho = r\cdot sin\theta = \rho,$$

а проекция импульса

$$p_\varphi = mv_\varphi = m\rho\omega_z\,,$$

так как линейная скорость выражается через угловую скорость с помощью (1.11.2)

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] \quad \text{и} \quad v_\varphi = \rho\omega_z\,.$$

Тогда получаем момент импульса относительно оси z в виде:

$$L_z = \rho p_\varphi = \rho m v_\varphi = \rho^2 m\omega_z \qquad (1.11.19)$$

Аналогично имеем

$$M_z = \rho F_\varphi \qquad (1.11.20)$$

Видно, что проекции МИ и силы на ось z зависят только от расстояния ρ до оси и не зависят от координаты z. Отсюда следует вывод: проекции момента силы M_z и импульса L_z не зависят от выбора точки на оси $0z$.

Приложение 1. Напомним, что векторное произведение в декартовой системе координат для векторов $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ и $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ есть вектор $\vec{C}$, определяемый:

$$\vec{C} = [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{e}_x(A_yB_z - A_zB_y) + \vec{e}_y(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{e}_z(A_yB_y - A_yB_x)$$

Векторное произведение в цилиндрической системе координат для векторов $\vec{A}(A_\rho, A_\varphi, A_z)$ и $\vec{B}(B_\rho, B_\varphi, B_z)$ записывается аналогичным образом:

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \vec{e}_\rho(A_\varphi B_z - A_z B_\varphi) + \vec{e}_\varphi(A_z B_\rho - A_\rho B_z) + \vec{e}_z(A_\rho B_\varphi - A_\varphi B_\rho)$$
