1.12. Закон сохранения момента импульса.

1.12.1. Момент импульса системы точек.

Рассмотрим систему материальных точек (частиц). Момент импульса (МИ) системы определяется суммой МИ отдельных частиц:

$$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i \tag{1.12.1}$$

Все вектора в (1.12.1) определены относительно одной и той же точки отсчета 0. Момент сил относительно той же точки также равен сумме моментов сил:

$$\vec{M}=\sum_i \vec{M}_i \tag{1.12.2}$$

Разбивая все силы, действующие на частицы системы, на внутренние и внешние силы, последнее уравнение можно записать:

$$\vec{M}=\vec{M}_{int}+\vec{M}_{ext}=\sum_{i,k}\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{ik}\right]+\sum_i\left[\vec{r}_i,\vec{F}_i\right] \tag{1.12.3}$$

где $\vec{F}_{ik}$ – сила, действующая на частицу i со стороны материальной точки k, а $\vec{F}_i$ – внешняя сила, действующая на i точку. Нетрудно увидеть, что суммарный момент внутренних сил равен нулю $\vec{M}_{int}=0$.

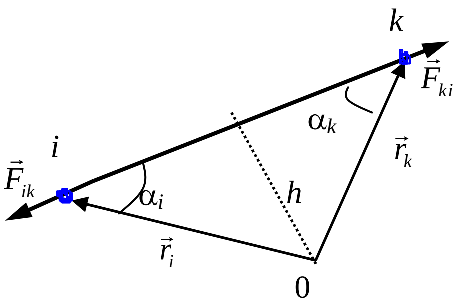

Рис. 12.1.

Это следует из того, что внутренние парные силы равны по модулю и противоположны по направлению $\vec{F}_{ik}=-\vec{F}_{ki}$, а плечи этих сил одинаковы. В самом деле, из рисунка 12.1 видно, что для пары взаимодействующих частиц i и k имеем следующее соотношение:

$$h=r_i\sin\alpha_i=r_k\sin\alpha_k .$$

Из этого следует, что

$$\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{ik}\right]+\left[\vec{r}_k,\vec{F}_{ki}\right]=0 . \tag{1.12.4}$$

Итак, для системы взаимодействующих частиц уравнение моментов имеет вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}_{ext} \tag{1.12.5}$$

куда входят моменты внешних сил только.

1.12.2. Закон сохранения МИ для замкнутых систем.

Для замкнутой системы внешних сил нет и, следовательно, момент внешних сил $\vec{M}_{ext}=0$. Тогда из (1.12.5) получаем:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \tag{1.12.6}$$

Или иначе получаем, что момент импульса замкнутой системы сохраняется:

$$\vec{L}=const \tag{1.12.7}$$

Соотношение (1.12.7) отражает *закон сохранения момента импульса замкнутой системы*. Наряду с законами сохранения импульса и энергии, закон сохранения МИ является фундаментальным законом природы.

Для одной материальной точки, если момент силы равен нулю $\vec{M}_{ext}=0$, получаем также:

$$\vec{L}=\left[\vec{r},\vec{p}\right]=const \tag{1.12.8}$$

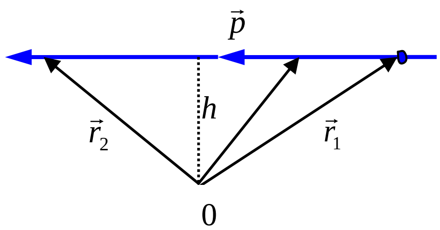

Рис. 12.2.

Рассмотрим несколько примеров.

а). Вначале рассмотрим движение свободной частицы $\vec{L}=\left[\vec{r},\vec{p}\right]=const$ и, как видно из рисунка 12.2, можно записать:

$$L=ph. \tag{1.12.9}$$

Итак, при свободном движении частицы вдоль прямолинейной траектории ее МИ не меняется относительно выбранного центра 0.

б). При движении частицы по кругу с постоянной скоростью v сила, действующая на частицу, может быть направлена к центру или от него (см рис. 12.3). Таким образом, вектор силы можно записать $\vec{F} = F\vec{e}_r$, и тогда момент этой силы равен нулю $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = 0$, поскольку угол между радиус-вектором и вектором силы равен нулю. Поэтому МИ не меняется при движении частицы по окружности с постоянной скоростью:

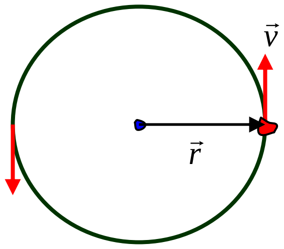

Рис. 12.3.

$$L = rp = mvr = m\omega r^2 \tag{1.12.10}$$

Вращение с постоянной скоростью оставляет постоянным момент импульса, вектор которого направлен по оси вращения (на рис. 12.3 вектор смотрит на нас из плоскости рисунка).

При переходе к другой точке отсчета момент импульса меняется. В самом деле, рассмотрим отсчет момента импульса от точек 0 и 0′. Как видно из рис. 12.4, переход к другой системе отсчета (т.е. от точки 0 к точке 0′) МИ преобразуется следующим образом:

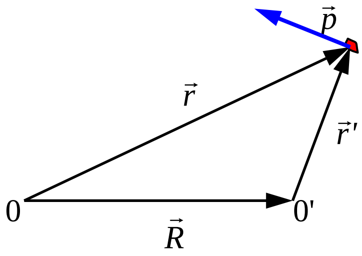

Рис. 12.4.

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right] = \left[\vec{r}' + \vec{R}, \vec{p}\right] = \left[\vec{r}', \vec{p}\right] + \left[\vec{R}, \vec{p}\right]$$

$$\vec{L} = \vec{L}' + \left[\vec{R}, \vec{p}\right], \tag{1.12.11}$$

где $\vec{R}$ – вектор относительного расстояния между точками отсчета.