1.13. Движение частицы в центральном поле.

1.13.1. Сохранение момента импульса в центральном поле.

В §1.8 рассматривались центральные силы, и было показано, что их работа не зависит от пути перехода между двумя точками, т.е. центральные силы консервативны. Итак, центральная сила записывается в виде:

$$\vec{F}=F(r)\cdot\vec{e}_r=F(r)\frac{\vec{r}}{r} \tag{1.13.1}$$

где r – расстояние от центра поля. Очевидно, что в этом случае удобнее задачу рассматривать в сферической системе координат. Поскольку эта сила консервативна, то можно ввести потенциальную энергию, которую также зависит только от расстояния до центра поля:

$$\vec{F}=-\nabla U(r)=-\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r \tag{1.13.2}$$

При движении в центральном поле момент силы равен нулю, так как угол между векторами в векторном произведении равен нулю:

$$\vec{M}=\left[\vec{r},\vec{F}\right]=F(r)\left[\vec{r},\vec{e}_r\right]=0 \tag{1.13.3}$$

Тогда из уравнения моментов (1.12.5) получаем, что момент импульса (МИ) есть постоянная величина.

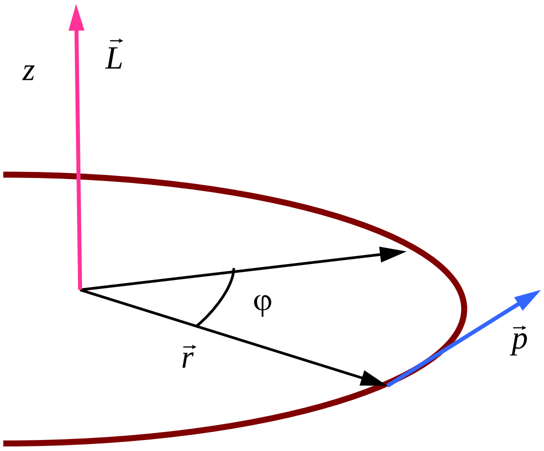


Рис. 13.1.

При движении частицы в центральном поле полный момент импульса сохраняется, несмотря на то, что система (одна частица во внешнем поле) не является замкнутой.

$$\vec{L}=\left[\vec{r},\vec{p}\right]=m\left[\vec{r},\vec{v}\right]=const \tag{1.13.4}$$

Итак, вектор $\vec{L}=const$, т.е. его величина и его направление сохраняются. С другой стороны вектор МИ перпендикулярен к векторам $\vec{r}$ и $\vec{p}$ (рис. 13.1), то, следовательно, движение частицы происходит в плоскости перпендикулярной к $\vec{L}$. Получаем, что частица, двигаясь в центральном поле, *имеет плоскую орбиту* (траекторию).

Если направим ось z по вектору $\vec{L}$, тогда $L = L_z$ и траектория лежит в плоскости (x,y), перпендикулярной оси z. В §1.11 получали, что проекция МИ на ось равна $L_z=m\rho^2\omega_z$. В нашем случае вектор $\vec{r}$ лежит в плоскости орбиты, тогда для момента импульса имеем:

$$L=mr^2\omega=mr^2\frac{d\varphi}{dt}=const \tag{1.13.5}$$

Таким образом, МИ частицы характеризуется скоростью изменения азимутального угла (угловой скоростью) и расстоянием до центра поля.

Геометрическая интерпретация движения по орбите. Найдем площадь малого сектора OAB (рис. 13.2), определяемого двумя лучами OA и OB и бесконечно малой дугой AB:

$$dS=S_{OAB}\cong\frac{1}{2}(OB)\cdot(AC)=\frac{1}{2}r\cdot(AB)Sin\alpha.$$

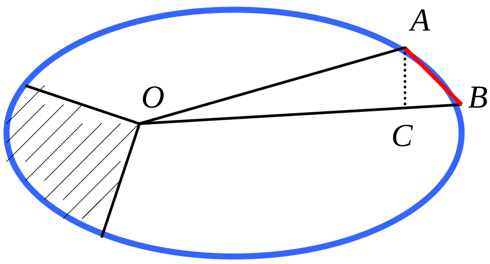


Рис. 13.2.

Здесь α – угол между радиусом $r = (OB)$ и бесконечно малой дугой $(AB) = v\cdot dt$ (в пределе маленькая дуга AB направлена по касательной к орбите). Тогда для площади сектора получаем:

$$dS=\frac{1}{2}r\cdot vdt\cdot Sin\alpha=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{r},\vec{v}\right]\right|dt= \\ =\frac{dt}{2m}\left|\left[\vec{r},\vec{p}\right]\right|=\frac{dt}{2m}L \tag{1.13.6}$$

Введем понятие *секториальной скорости* как площадь, описываемую радиусом- вектором частицы за единицу времени:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} \equiv \dot{\vec{S}} = \frac{1}{2}[\vec{r},\vec{v}] \qquad (1.13.7)$$

Здесь “точка” над вектором (или другой величиной) означает производную по времени – это обозначение, часто встречающееся в механике. В силу сохранения МИ (1.13.4) секториальная скорость постоянна. Это – 2-ой закон Кеплера, гласящий, что *секториальная скорость постоянна при движении частицы в центральном поле*:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} \qquad (1.13.8)$$

Примечание 1. 1-ый закон Кеплера касается траектории тела в поле с потенциальной энергией $U(r) = \alpha/r$.

В результате имеем следующие свойства движения частицы в центральном поле:

1) движение плоское, плоскость проходит через точку O,
2) секториальная скорость постоянна.

1.13.2. Закон сохранения энергии.

Центральные силы консервативны, следовательно, полная энергия частицы постоянна (как в замкнутой системе). Разложим импульс частицы на две составляющие вектора: $\vec{p} = \vec{p}_r + \vec{p}_\varphi$ (напомним, что ось z направлена перпендикулярно траектории частицы и проекция импульса на эту ось равна 0, а ось $\vec{e}_\varphi$ направлена перпендикулярно к оси $\vec{e}_r$). Тогда момент импульса и полная энергия определяются, соответственно:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}_r + \vec{p}_\varphi] = [\vec{r}, \vec{p}_\varphi]; \quad L = rp_\varphi \qquad (1.13.9)$$

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m} + U(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \qquad (1.13.10)$$

Слагаемое в (1.13.10) $L^2/2mr^2$ носит специальное название: *центробежная энергия,* поскольку оно связано с вращательным движением частицы. Из уравнения (1.13.10) видно, что в уравнении для определения энергии остается только одна переменная – расстояние до центра r. Таким образом, движение частицы в центральном поле можно рассматривать как одномерное (радиальное) движение в поле с *эффективной потенциальной энергией*:

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + U_{eff}(r), \quad U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \qquad (1.13.11)$$

Таким образом, к обычному центральному потенциалу мы добавили часть, связанную с угловым движением, которая также имеет центральную симметрию.

Задача о движении частицы в центральном поле сводится фактически к одномерной задаче о движении частицы вдоль радиуса в эффективном потенциале.

Например, рассмотрим эффективную потенциальную энергию гравитационного поля, с потенциальной энергией

$$U(r) = -\gamma\frac{Mm}{r} = m\varphi(r),$$

где $\varphi(r)$ – потенциал поля, введенный в параграфе 1.9. Гравитационный потенциал имеет характер притяжения, а центробежный потенциал имеет отталкивающий характер, как показано на рис. 13.3.

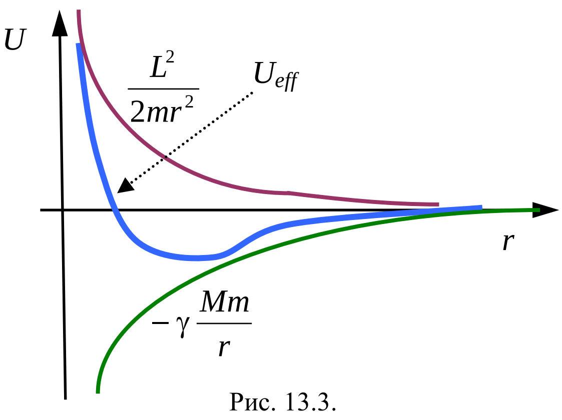


Рис. 13.3.

Там же показана эффективная (суммарная) потенциальная энергия U_{eff}, которая представляет собой отталкивание на малых расстояниях и притяжение на больших расстояниях и имеет потенциальную яму на промежуточных расстояниях.

1.13.3. <u>О траектории частицы</u>.

Запишем уравнения для компонент импульса иначе:

$$\begin{aligned}\vec{p}_r &= m\vec{v}_r = m\frac{dr}{dt}\vec{e}_r = m\dot{r}\vec{e}_r \\ \vec{p}_\varphi &= m\vec{v}_\varphi = m\left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt},\vec{r}\right] \equiv m\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\end{aligned} \tag{1.13.12}$$

Вектор угловой скорости направлен перпендикулярно плоскости орбиты, т.е. вдоль вектора $\vec{L}$ и оси z. Так как угол между вектором угловой скорости и радиус-вектором равен $\pi/2$, то

$$p_\varphi = m\frac{d\varphi}{dt}r \equiv mr\dot{\varphi}$$

Тогда подставляя импульс в уравнения (1.13.9) и (1.13.10), получаем:

$$\left.\begin{aligned}E = const = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + U(r) \\ L = const = mr^2\dot{\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{1.13.13}$$

Подставляя $\dot{\varphi}$ из второго уравнения (1.13.13) в первое, получаем для скорости радиального движения (производной длины радиуса) следующее выражение:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}} \tag{1.13.14}$$

Откуда получаем связь между радиусом и временем движения, или в данном случае неявную зависимость радиуса $r = r(t)$ от времени:

$$\begin{aligned}dt &= \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}} \\ t &= \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}} + Const\end{aligned} \tag{1.13.15}$$

Исключим время в (1.13.14) и (1.13.15) с помощью второго уравнения в (1.13.13)

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2}dt\,.$$

При этом находим уравнение, определяющее плоскую траекторию частицы, т.е. связь между r и φ:

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}} + const \tag{1.13.16}$$

Границы радиального движения частицы определяются равенством (1.13.13), когда радиальная скорость частицы равна нулю $\dot{r} = 0$ (рис.13.4а):

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \tag{1.13.17}$$

Отметим, что равенство нулю радиальной скорости $\dot{r} = 0$ не означает, что частица остановилась, поскольку она обладает скоростью вдоль траектории $v_\varphi \neq 0$ $\left(L = const\right)$.

При финитном движении, т.е. когда существуют r_{min} и r_{max}, траектория не обязательно является замкнутой (рис. 13.4б). За одну петлю, т.е. при прохождении от r_{max} до r_{min} и снова до r_{max}, радиус-вектор частицы повернется на следующий угол:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L/r^2\, dr}{\sqrt{2m(E-U)-L^2/r^2}} \qquad (1.13.18)$$

Условие замкнутости траектории состоит в том, чтобы $\Delta\varphi$ было равно рациональной части от 2π, или иначе $\Delta\varphi = 2\pi\frac{m}{n}$, где m и n – целые числа.

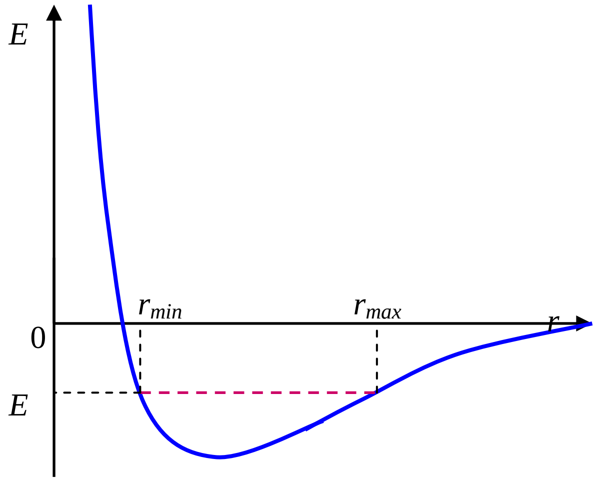


Рис. 13.4а

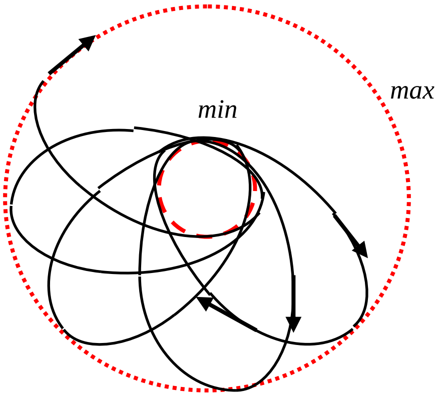
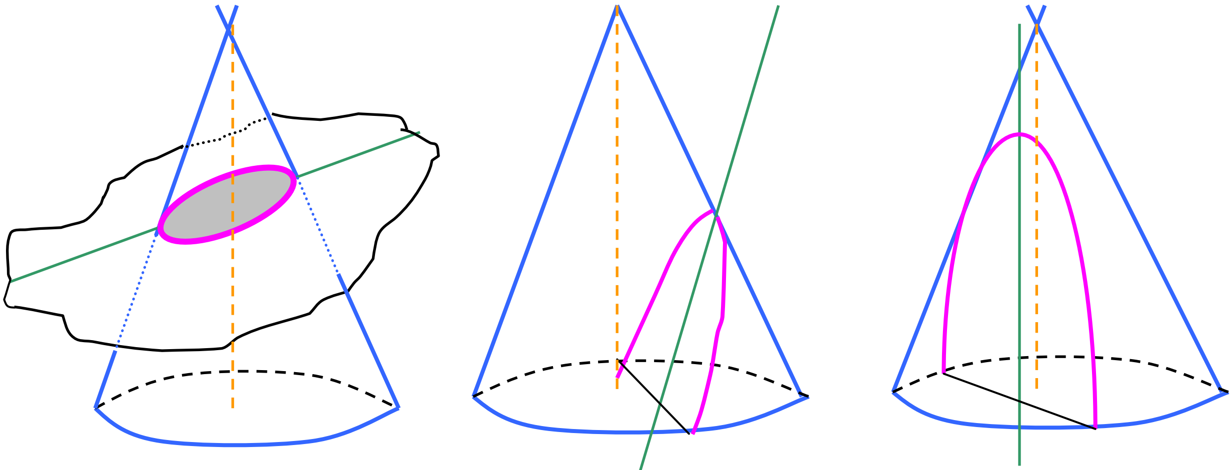


Рис. 13.4б.

В общем случае потенциальной энергии $U(r)$ траектория финитного движения не замкнута. Существуют, однако, *два типа полей, в которых все траектории финитных движений замкнуты*. Это поля с потенциальной энергией обратно пропорциональной расстоянию до центра или прямо пропорциональной квадрату расстояния:

$$U(r) \sim \frac{1}{r}, \qquad U(r) \sim r^2 . \qquad (1.13.19)$$

Задача о движении в кулоновском или гравитационном поле с потенциальной энергией $U(r) = \alpha/r$ – это задача Кеплера. Не решая уравнения (1.13.15) и (1.13.16) для этого поля, запишем ответ: траектория частицы представляет собой одно из *конических сечений* плоскостью, а именно – *Эллипс*, *Гипербола*, *Парабола* (см рис. 13.5, т.е. представляет собой кривую, получающуюся при пересечении поверхности конуса и плоскости).



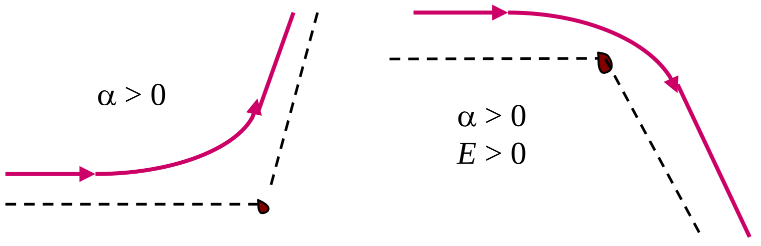
А) эллипс Б) парабола В) гипербола

Рис. 13.5.

Эллипс получается при произвольном сечении плоскостью конической поверхности под углом к оси и боковой образующей. В частном случае получаем окружность, когда плоскость сечения перпендикулярна оси конической поверхности. Гипербола получается, когда плоскость сечения параллельна оси конической поверхности. А парабола – есть результат сечения плоскостью, которая параллельна боковой образующей конической поверхности.

Какая траектория реализуется – это зависит от знака постоянной α в формуле $U(r)=\alpha/r$. Так, при отталкивающем взаимодействии $\alpha > 0$, всегда будет гипербола (см рис. 13.5.В и 13.6.А).

Если имеем притяжение $\alpha < 0$, то траектория может быть любой из вышеприведенных типов, а какая именно, зависит от полной энергии частицы E. Если $E < 0$, то имеем финитное движение и траектория частицы есть эллипс. При энергии, равной $E = 0$, движение инфинитное и траектория имеет вид параболы (со скоростью, равной 0 на бесконечности). Когда полная энергия частицы $E > 0$, получаем также инфинитное движение с траекторией по гиперболе (рис. 13.6.Б).



А) Б)

Рис. 13.6.