

1.14. Столкновение двух тел.

1.14.1. Приведенная масса.

В механике только задача двух тел имеет аналитическое решение в общем виде. В предыдущем параграфе 1.13 рассматривалось движение одной частицы в поле, центр которого не двигался. Более реалистичный случай – это когда взаимодействуют две частицы, и они образуют замкнутую систему. Поэтому задачу об их движении удобнее решать в системе центра инерции (СЦИ). Центр инерции замкнутой системы из 2-х частиц либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно вследствие закона сохранения импульса.

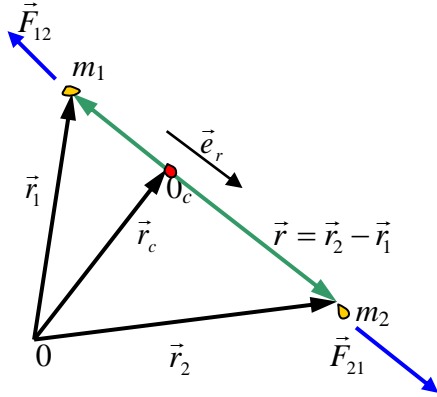


Рис. 14.1.

Радиус-вектор (координаты) центра инерции (ЦИ) определяется (рис. 14.1, см также §1.5):

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.14.1)$$

Выберем новую систему отсчета, центр которой поместим в центр инерции (т.е. на рис. 14.1 совмещаем центры O и O_c), тогда в формуле (1.14.1) имеем $\vec{r}_c = 0$ и следующее соотношение:

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2 \quad (1.14.2)$$

С другой стороны, расстояние между двумя частицами (рис. 14.1) – это относительное расстояние:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1.14.3)$$

Из этих двух уравнений (1.14.2) и (1.14.3) находим радиус-векторы частиц в системе ЦИ через вектор относительного расстояния:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (1.14.4)$$

Силы взаимодействия по третьему закону Ньютона могут быть записаны (направления векторов определены в соответствие с рис. 14.1):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -F(r) \vec{e}_r \quad (1.14.5)$$

Запишем уравнения движения:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -F(r) \vec{e}_r \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = F(r) \vec{e}_r \end{cases} \quad (1.14.6)$$

Перенеся массу в уравнениях (1.14.6) в правую часть, вычтем первое уравнение из второго:

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F(r) \vec{e}_r = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F(r) \vec{e}_r$$

Итак, получаем уравнение движения в виде:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F(r) \vec{e}_r, \quad (1.14.7)$$

где ввели обозначение $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – *приведенная масса*.

Формально мы перешли к задаче движения одной “эффективной” частицы в поле центральных сил $F(r)$, причем эта движущаяся частица обладает эффективной массой μ . Таким образом, любая задача о движении *двух взаимодействующих тел* сводится к решению задачи о движении одного тела с эффективной массой в центральном поле. Поэтому все выводы, полученные в предыдущем параграфе, справедливы при решении этой задачи двух тел. В частности, получаем плоские траектории движения двух частиц: сначала находим координаты относительного движения $r(t)$ или траекторию $r(\varphi)$, и затем координаты отдельных частиц $r_1(t)$ и $r_2(t)$. При этом получаем те же траектории для отдельных частиц. Так для полей типа (1.13.19): эллипсы, параболы и гиперболы.

Приведем несколько примеров задачи двух тел.

А) *Двойные системы звезд*: в такие системы обычно входят звезды с разными массами и, соответственно, с разными по размерам траекториями – эллипсами (рис. 14.2А).

Б). *Позитроний* – система, состоящая из электрона и позитрона: у частиц одинаковые массы и одинаковые траектории.

В). *Рассеяние заряженных частиц* друг на друге. На рис. 14.2Б показаны траектории сталкивающихся частиц с зарядами одинаковых знаков.

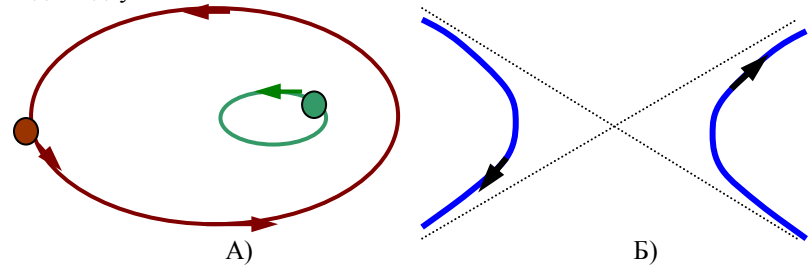


Рис. 14.2.

1.14.2. Неупругие столкновения

Неупругие столкновения – это такие столкновения, при которых часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию сталкивающихся тел. Степень неупругости зависит от того, какая часть энергии переходит во внутреннюю энергию. В качестве примера можно рассмотреть следующую задачу: пуля пробивает доску и теряет часть энергии, которая идет на изменение внутренней структуры и теплоту. Предельный случай неупругого удара – *абсолютно неупругий удар* – это когда оба тела при столкновении сливаются в одно общее (см рис. 14.3). При этом выполняется закон сохранения импульса, а в законе сохранения энергии необходимо учитывать, что часть кинетической энергии удара переходит во внутреннюю энергию частиц.

В столкновениях атомных частиц часто неупругие процессы начинают происходить, только начиная с некоторой энергии сталкивающихся частиц, а при меньших энергиях происходят только упругие столкновения. Таким образом, обнаруживается порог неупругой реакции. В качестве пороговой реакции рассмотрим, например, процесс, обратный процессу столкновения частиц – процесс распада составной частицы.

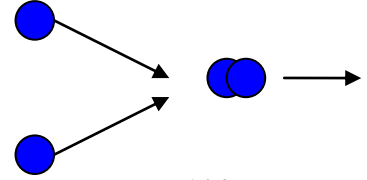


Рис. 14.3.

Распад частиц.

Рассмотрим распад частицы массы m на две частицы с массами m_1 и m_2 . Рассмотрим этот процесс в лабораторной системе отсчета, где распадающаяся частица массы m имеет скорость \vec{V} (рис. 14.4), и в СЦИ (рис. 14.5), где она покоится. Частицы, появившиеся в результате распада, имеют скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 в лабораторной системе отсчета и скорости \vec{v}_{01} и \vec{v}_{02} в СЦИ.

Лабораторная система отсчета

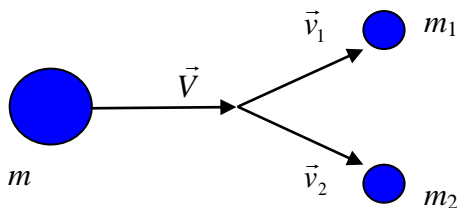


Рис. 14.4.

Система центра инерции

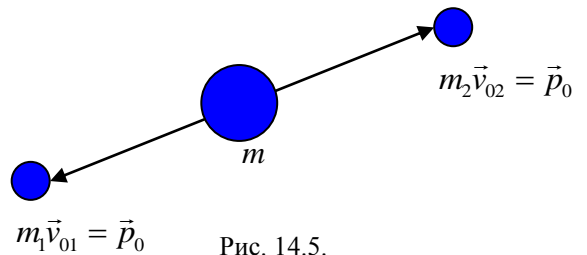


Рис. 14.5.

В СЦИ имеем закон сохранения импульса $p_1 = mv_{01} = p_2 = mv_{02} = p_0$, тогда закон сохранения энергии запишется в следующем виде:

$$E_{\text{вн}} = E_{1\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_2} \quad (1.14.8)$$

где $E_{\text{вн}}$ – внутренняя энергия частицы до распада, $E_{1\text{вн}}$ и $E_{2\text{вн}}$ – внутренние энергии частиц после распада. Введем энергию распада, т.е. ту часть энергии, которая выделилась из внутренней энергии распадающейся частицы:

$$\varepsilon = E_{\text{вн}} - E_{1\text{вн}} - E_{2\text{вн}} \quad (1.14.9)$$

Тогда получаем:

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} p_0^2$$

Т.е. энергия распада частицы равна кинетической энергии частицы с приведенной массой:

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2\mu} \quad (1.14.10)$$

Если ε известно, то находим p_0 и скорости частиц в СЦИ:

$$v_{01} = \frac{p_0}{m_1}, \quad v_{02} = \frac{p_0}{m_2} \quad (1.14.11)$$

Примечание 1. Эти же уравнения (1.14.10)-(1.14.11) справедливы для абсолютно неупругого удара, если процесс рассматривать в системе центра масс (СЦИ).

Проанализируем возможные углы вылета θ одной из частиц по отношению к скорости первоначальной частицы в лабораторной системе. Пусть \vec{V} – скорость первичной частицы в Лабораторной системе отсчета (ЛСО), \vec{v}_1 – скорость одной из частиц в ЛСО, \vec{v}_{01} – ее скорость в СЦИ. Тогда, следуя преобразованиям Галилея для скорости, имеем следующее соотношение:

$$\vec{v}_1 - \vec{V} = \vec{v}_{01}, \quad (1.14.12)$$

Последнее равенство возводим в квадрат:

$$v_1^2 + V^2 - 2v_1 V \cos \theta = v_{01}^2 \quad (1.14.13)$$

Здесь θ и есть угол вылета частицы по отношению к скорости первоначальной частицы как угол между векторами \vec{V} и \vec{v}_1 в ЛСО. Это уравнение дает зависимость скорости частицы после распада от направления ее вылета в ЛСО.

Можно проанализировать эти зависимости графически, как показано на Рис.14.6. Для этого строим окружность радиуса v_{01} . Затем к центру окружности проводим вектор \vec{V} . Вектор \vec{v}_1 представляет собой сумму векторов \vec{V} и \vec{v}_{01} .

Существует 2 возможности (см рис. 14.6).

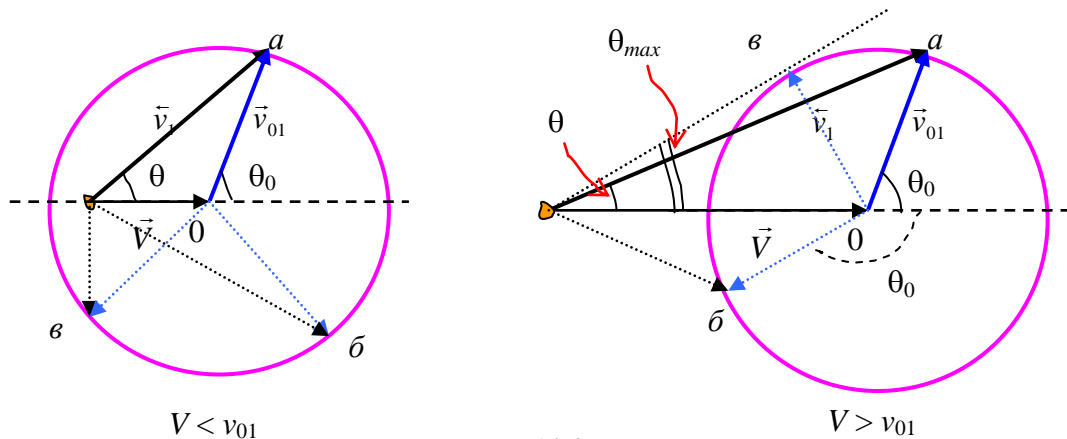


Рис. 14.6.

1). Скорость первичной частицы меньше скорости одной из вылетевших частиц (пусть частицы 1) в СЦИ $V < v_{01}$. Это показано на левой части изображения рис. 14.6, где помечены 3 возможные ситуации с разными направлениями \vec{v}_{01} (т.е. разными углами θ_0): a , b , v (синим цветом помечены вектора в СЦИ). В этом случае частица 1 может вылететь под любым углом θ от 0 до 2π , т.к. при любом выбранном угле θ_0 имеется угол θ .

2). Скорость первичной частицы больше скорости частицы 1 в СЦИ $V > v_{01}$ как это показано на правой части рис. 14.6, где также помечены 3 возможные ситуации: *a*, *б*, *в*. Из рис. 14.6 видно, что какое бы мы не брали θ_0 , частица 1 может вылететь только вперед. Существует максимальный угол вылета частицы θ_{max} , который определяется касательной к окружности, случай *в* на правом рисунке 14.6, и который получается из уравнения:

$$\text{Sin}\theta_{max} = \frac{v_{01}}{V} \quad (1.14.14)$$

Аналогичный анализ можно провести для неупругого столкновения.

1.14.3. Упругие столкновения

Столкновение двух частиц называется *упругим*, если оно не сопровождается изменением их внутреннего состояния. В законе сохранения энергии внутреннюю энергию тел можно не учитывать. Выберем лабораторную систему отсчета, где одна из частиц покоится $\vec{p}_2 = 0$, а другая частица налетает с импульсом \vec{p}_1 . Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2}{2m_1} &= \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \\ \vec{p}_1 &= \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \end{aligned} \quad (1.14.15)$$

Выразим \vec{p}_1' из закона сохранения импульса и подставим в закон сохранения энергии:

$$\frac{p_1^2}{m_1} = \frac{p_1'^2}{m_1} + p_2'^2 - 2\vec{p}_1\vec{p}_2' + \frac{p_2'^2}{m_2}$$

Вводя угол θ_2 между векторами \vec{p}_1 и \vec{p}_2' , выразим p_2' :

$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \text{Cos}\theta_2 \quad (1.14.16)$$

Будем интерпретировать полученный результат графически. Проведем вектор \vec{p}_1 , построим окружность радиуса $m_2 p_1 / (m_1 + m_2)$, центр которой лежит на векторе \vec{p}_1 , а ее левый край (см рис. 14.7) проходит через начало вектора \vec{p}_1 . При этом возможны два случая, когда $m_1 > m_2$ и $m_1 < m_2$ (на рис. 14.7 случаи *a* и *б* соответственно).

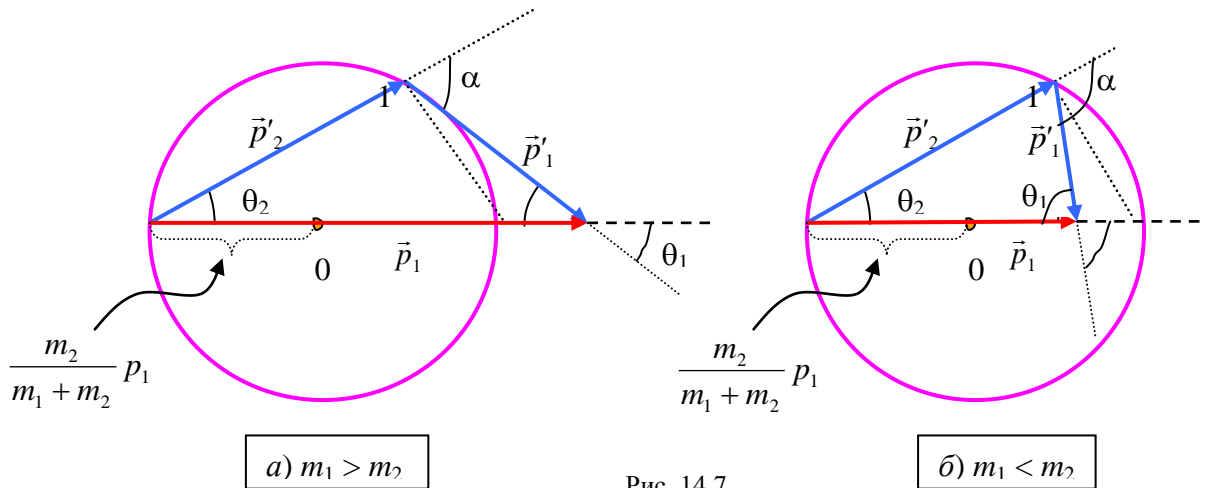


Рис. 14.7.

Диаметр окружности, равный $2m_2 p_1 / (m_1 + m_2)$ и будучи умноженный на $\text{Cos}\theta_2$, дает вектор \vec{p}_2' (на рис. 14.7 угол θ_2 – как угол, вписанный в окружность). Из закона сохранения импульса видно: угол θ_1 – угол отклонения 1-ой частицы (налетающей) после столкновения. Угол α – угол разлета 1 и 2-ой частиц после столкновения.

- 1) При $m_1 > m_2$ видно (на рис. 14.7а) передвигаем точку 1 по линии окружности и смотрим как меняются углы), что угол разлета α меняется от 0 до $\pi/2$. Также видно, что имеется максимальный угол отклонения θ_{1max} , определяемый моментом, когда \vec{p}'_1 касается окружности. Таким образом, когда налетает частица (тело) большей массы и упруго сталкивается с частицей (телом) меньшей массы, то обе частицы летят *вперед* после столкновения.
- 2) При $m_1 < m_2$ (также меняем положение точки 1 на рис. 14.7б) угол разлета α меняется от $\pi/2$ до π , а угол рассеяния θ_1 меняется от 0 до π . В этом случае, когда налетает частица меньшей массы на покоящуюся частицу большей массы, то после столкновения частицы разлетаются в разные стороны.
- 3) При $m_1 = m_2$ все точки начала и конца векторов лежат на окружности. Угол разлета частиц $\alpha = \pi/2$, то есть разлет частиц происходит под прямым углом. При этом $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$. При лобовом столкновении $\theta_2 = 0$.