

## 1.15. Рассеяние частиц. Эффективное сечение.

### 1.15.1. Рассеяние на силовом центре.

Рассмотрим снова рассеяние на силовом центре (или в качестве силового центра возьмем центр инерции двух сталкивающихся частиц). Введем параметры столкновения, которые видны на рисунке 15.1.

Если имеем отталкивающие силы, то в качестве траектории получаем всегда гиперболу, выгнутую от отталкивающего центра (рис. 15.1). При притяжении между налетающей частицей и силовым центром траектория также имеет вид гиперболы, но "изогнутую" к центру. Однако, параметры и решение самой задачи одинаково для обоих случаев, поэтому рассмотрим пример изображенный на рисунке 15.1 – отталкивающий центр.

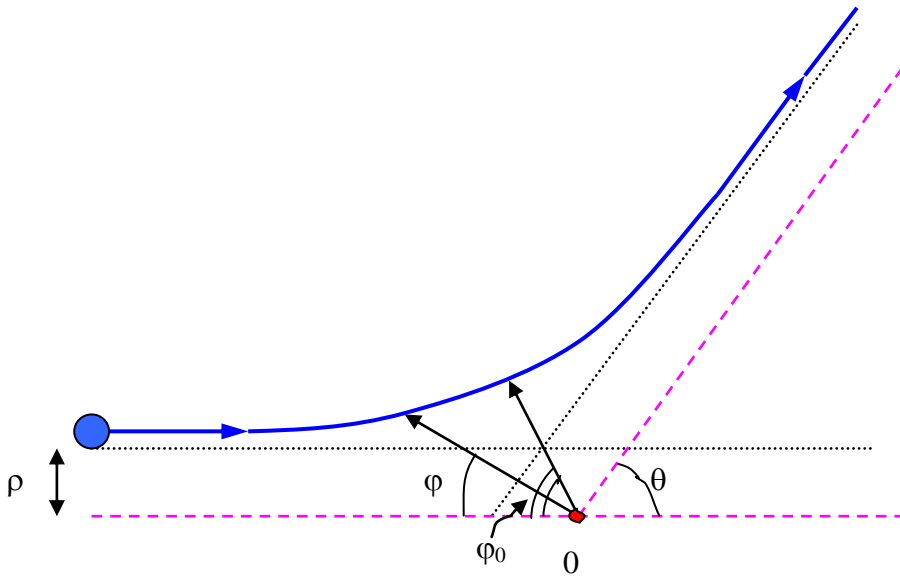


Рис. 15.1.

Итак, введем следующие параметры движения частицы:  $\rho$  – прицельное расстояние,  $\theta$  – угол рассеяния частицы,  $m$  – ее масса,  $v_\infty$  – скорость налетающей частицы, находящейся далеко от центра (на бесконечности). Введем также центральный угол  $\varphi$ , отсчитанный от горизонтальной оси, параллельной начальной скорости частицы. Легко также видеть из рисунка 15.1, что центральный угол  $\varphi_0$ , определяющий кратчайшее расстояние от центра  $O$  до траектории частицы, связан с углом рассеяния следующим соотношением:

$$\theta = \pi - 2\varphi_0 \quad (1.15.1)$$

Итак, на бесконечности, где, считаем, потенциальная энергия равна нулю, полная энергия и момент импульса имеют следующие значения:

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad L = m\rho v_\infty \quad (1.15.2)$$

Тогда угол  $\varphi_0$ , определяемый формулой (1.13.16) из §1.13, равен:

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} dr = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}} dr \quad (1.15.3)$$

Здесь мы уже воспользовались соотношениями (1.15.2). Формула (1.15.3) дает связь между прицельным параметром  $\rho$  и углом  $\varphi_0$ , а, следовательно, и углом рассеяния  $\theta$ .

Кулоновская или гравитационная потенциальная энергия может быть записана как

$$U = \frac{\alpha}{r}.$$

Для кулоновского поля потенциальная энергия имеет вид  $U = kq_1q_2/r$ , для гравитационного –  $U = -\gamma mM/r$ . Не вычисляя в нашем курсе интеграла (1.15.3), запишем для этих полей связь между прицельным параметром  $\rho$  и углом рассеяния  $\theta$  ( $\varphi_0$ ):

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{mv^2 \rho}{\alpha} \quad (1.15.4)$$

В 1910 году Эрнест Резерфорд вместе с Гансом Гейгером и Эрнстом Марсденом измеряли рассеяние  $\alpha$ -частиц (заряд  $2e$ ) на тонких пластинках золота и серебра, фактически на ядрах Ag и Au. По сути они рассеивали  $\alpha$ -частицы на центре с потенциальной энергией, равной:

$$U = \frac{Ze \cdot 2e}{r} \quad (1.15.5)$$

где  $Ze$  заряд ядра. Фактически это была попытка проверить формулу (1.15.4).

**Примечание 1.** Эрнест Резерфорд (Ernest Rutherford), английский физик, 1871-1937, Нобелевская премия 1908 г. по химии за исследование превращения элементов и химии радиоактивных веществ;  
Ганс Вильгельм Гейгер (Hans Geiger), немецкий физик, 1882-1945;  
Эрнест Марсден (Ernest Marsden), новозеландский физик, 1889-1970

### 1.15.2. Эффективное сечение.

Однако, формулу (1.15.4) непосредственно на опыте не проверить, т.к. она написана для определенного прицельного параметра  $\rho$ . Реально  $\alpha$ -частицы летят под любыми прицельными параметрами, которые не определить на эксперименте. В эксперименте с микрочастицами мы имеем дело не с индивидуальным отклонением одной частицы, а с рассеянием целого пучка одинаковых частиц, падающих на рассеивающий центр с одинаковыми скоростями  $v_\infty$ , но под разными прицельными параметрами  $\rho$ . Следовательно, частицы пучка рассеиваются также под разными углами  $\theta$ .

Поэтому в физике вводится другая, очень важная, характеристика процесса рассеяния – *сечение* или *эффективное сечение*.

**Определение:** *Эффективное сечение* – величина, характеризующая вероятность перехода системы сталкивающихся частиц в результате их рассеяния как упругого, так и неупругого в определенное конечное состояние.

Конечное состояние характеризуется углом рассеяния  $\theta$ . Пусть  $dN$  – число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ . Само это число  $dN$  зависит от числа падающих частиц, точнее от плотности частиц в потоке.

Обозначим за  $n$  плотность падающих частиц (количество частиц в единице объема), а за  $v$  их скорость вдоль пучка, тогда число падающих частиц на поперечную площадку  $\Delta S$  (см рис. 15.2) за время  $dt$  равно

$$dN_{пад} = nv\Delta S dt.$$

Значит, за единицу времени через единицу площадки проходит  $nv$  частиц.

Величина  $nv$  носит название *плотности потока частиц*.

Тогда эффективное сечение определяется как отношение числа рассеянных частиц под определенным углом (в растворе  $d\theta$ ) к числу падающих частиц на единицу площади в единицу времени:

$$d\sigma = \frac{dN}{nv} \quad (1.15.6)$$

Иначе, эффективное сечение – это число «положительных» событий (попадание в нужный раствор углов) при единичной плотности потока падающих частиц. Размерность сечения равна размерности площади, так как имеем следующие размерности входящих в (1.15.6) величин

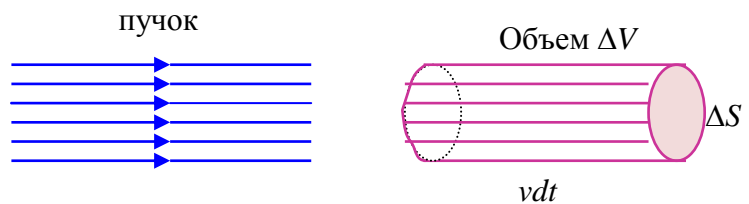


Рис. 15.2.

$$[dN]=1/T, [v]=L/T, [n]=1/L^3,$$

где  $L$  длина, а  $T$  время. Тогда и получаем, что размерность сечения – квадрат длины:

$$[d\sigma]=L^2. \quad (1.15.7)$$

Величина сечения определяется видом рассеивающего поля и является *важнейшей характеристикой процесса рассеяния*. Измеряется экспериментально и служит для определения структуры сталкивающихся частиц.

В классической механике связь между углом рассеяния  $\theta$  и прицельным параметром  $\rho$  взаимно однозначна. Это означает, что в интервал углов рассеяния от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$  рассеиваются только те частицы, которые летят в соответствующем интервале прицельных расстояний от  $\rho$  до  $\rho + d\rho$ . Поэтому число частиц, летящих в интервал  $(\theta \div \theta + d\theta)$  в единицу времени, можно записать:

$$dN = dS n v = 2\pi\rho |d\rho| n v \quad (1.15.8)$$

где  $dS$  – площадь кольца между радиусами от  $\rho$  до  $\rho + d\rho$  (см рис. 15.3).

**Примечание 2.** В (1.15.8) стоит модуль прицельного параметра, поскольку большим прицельным параметрам соответствуют меньшие углы рассеяния. Таким образом, интервалу прицельных параметров  $(\rho \div \rho + d\rho)$  соответствует интервал углов  $(\theta \div \theta - d\theta)$ , как показано на рисунке 15.3, и поэтому  $d\rho \sim -d\theta$ . Поскольку сечение положительная величина, мы пишем модуль прицельного параметра.

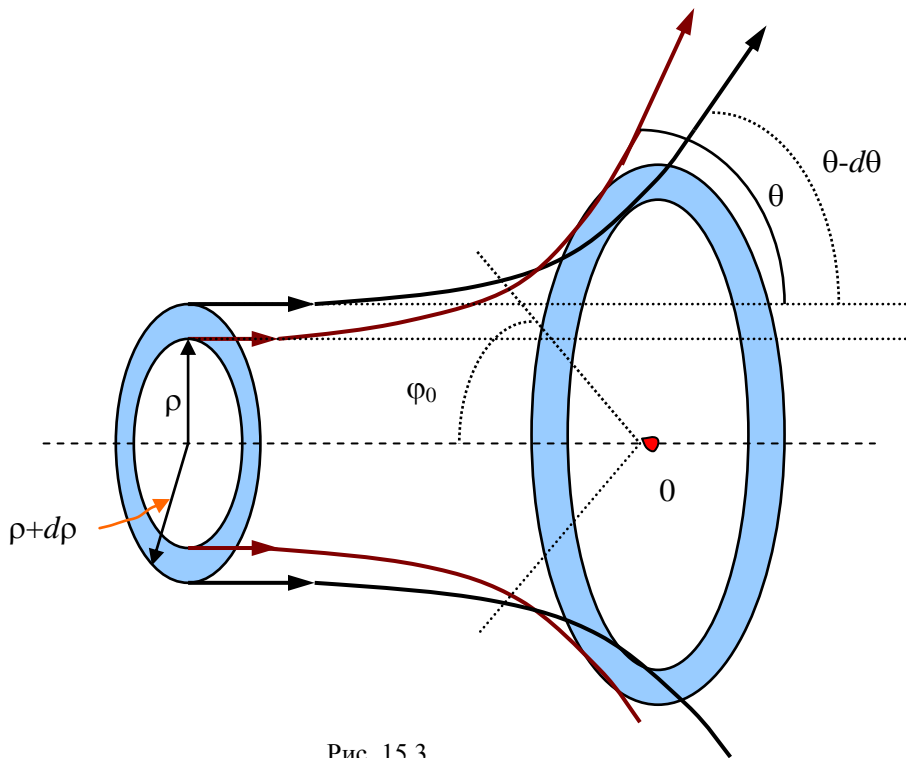


Рис. 15.3.

Все частицы, которые попали в кольцевой "раструб"  $(\theta \div \theta - d\theta)$ , изображенный на рис. 15.3, т.е. рассеиваются под одними и теми же углами. Удобнее выражать сечение через "объемный" или *телесный* угол, при этом получим информацию обо всех частицах, который пересекли кольцевую площадку.

**Примечание 3.** О телесном угле. Телесный угол вводят как отношение площадки  $dS$  на поверхности сферы радиуса  $r$  к квадрату этого радиуса (рис. 15.4):

Итак, пользуясь определением (1.15.6), сечение может быть выражено через прицельное расстояние

$$d\sigma = 2\pi\rho |d\rho| \quad (1.15.9)$$

Однако часто удобнее с экспериментальной точки зрения характеризовать сечение углами, под которыми вылетают частицы, поскольку на эксперименте приборы – детекторы – измеряют число рассеянных частиц под каким-то углом. Этот угол измерения может меняться, т.е. исследуется зависимость количество зафиксированных частиц (сечение) в зависимости от угла рассеяния. Поэтому перепишем (1.15.9) в виде:

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta \quad (1.15.10)$$

Все частицы, которые попали в кольцо между радиусами  $(\rho \div \rho$

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \quad (1.15.11)$$

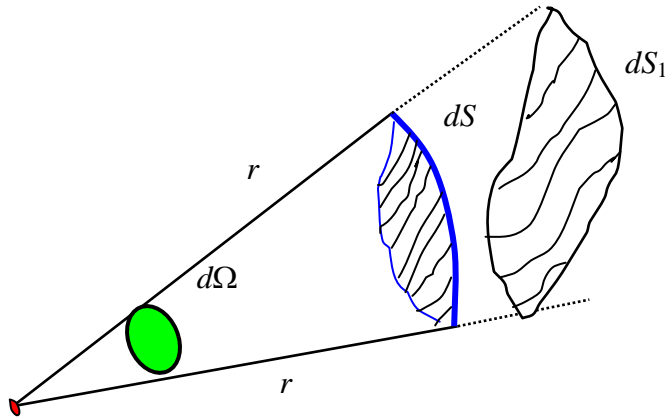


Рис. 15.4.

Можно провести лучи из начала координат, проходящие через границы площадки  $dS$ , которые образуют некоторый “раструб”. Причем любая поверхность  $dS_1$ , опирающаяся на  $dS$ , или имеющая свои границы на стенках “раструба”, будет иметь один и тот же телесный угол  $d\Omega$ .

В качестве примера телесного угла можно привести «рупор»: любая поверхность внутри его границ имеет тот же телесный угол. Полный телесный угол равен:

$$\Omega = 4\pi, \quad (1.15.12)$$

что легко получить, если подставить всю площадь поверхности сферы  $S = 4\pi r^2$  в (1.15.11).

**Примечание 4.** В сферической системе координат бесконечно малый элемент поверхности имеет вид

$$d^2S = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Тогда бесконечно малый элемент телесного угла равен:

$$d\Omega = \frac{d^2S}{r^2} = \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi$$

Выбирая в качестве поверхности площадь кольца

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta,$$

получаем элемент телесного угла в виде (1.15.13).

В нашем случае рассеяния получаем, что телесный угол определяется площадью кольца на поверхности сферы, вырезаемого двумя конусами с углами раствора  $\theta$  и  $\theta - d\theta$  (см рис. 15.5). Сосчитаем площадь этого

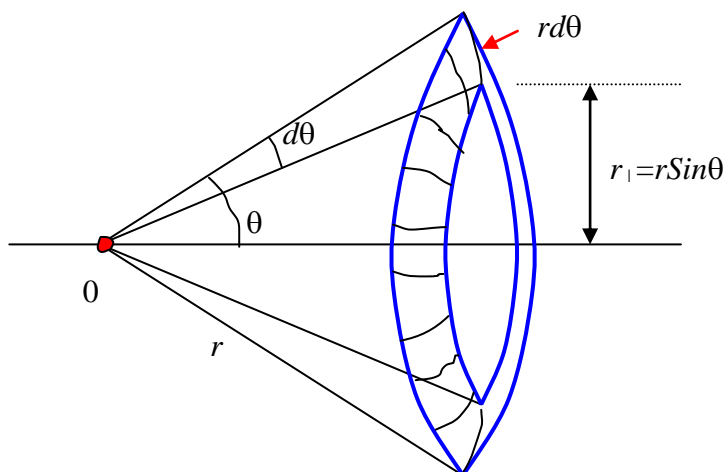


Рис. 15.5.

кольца, считая, что в случае бесконечно малого угла  $d\theta$ , кривизной поверхности можно пренебречь. Площадь тонкого кольца равна произведению длины окружности

$$2\pi r_{\perp} = 2\pi r \sin\theta$$

на ширину кольца  $rd\theta$  (длина малой дуги):

$$dS = 2\pi r_{\perp} \cdot rd\theta = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta.$$

Откуда телесный угол, под которым видна поверхность кольца, равен:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = 2\pi \sin\theta d\theta \quad (1.15.13)$$

Тогда сечение из (1.15.10) равно:

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\Omega \quad (1.15.14)$$

Поскольку в (1.15.14) фиксируется малый телесный угол рассеяния  $d\Omega$ , то такое сечение обычно называют *дифференциальным сечением*. Или чаще дифференциальное сечение записывают как отношение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| \quad (1.15.15)$$

Зная зависимость прицельного параметра от угла рассеяния  $\rho = \rho(\theta)$  и вычислив производную, получим дифференциальное сечение как функцию угла  $\theta$ . Это дает зависимость числа рассеянных частиц от угла рассеяния, что может измеряться на эксперименте.

Чтобы получить полное сечение  $\sigma$ , определяющее тот факт, что рассеяние вообще состоялось, и что учитываются все углы рассеяния, надо проинтегрировать (1.15.14) по всем углам.

### 1.15.3. Упругое рассеяние на твердом шаре.

Рассмотрим в качестве примера процесса рассеяния в механике рассеяние частицы на упруго отражающем шаре радиуса  $R_0$  (рис. 15.6). Чтобы воспользоваться результатами предыдущего пункта, надо найти связь между прицельным параметром  $\rho$  и углом рассеяния  $\theta$ :

$$\rho = R_0 \sin\varphi_0 = R_0 \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = R_0 \cos\frac{\theta}{2}. \quad (1.15.16)$$

Вычисляем производную (берем ее модуль):

$$\left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| = \frac{R_0}{2} \sin\frac{\theta}{2}$$

и подставим в формулу для дифференциального сечения (1.15.14):

$$d\sigma = 2\pi R_0 \cos\frac{\theta}{2} \cdot \frac{R_0}{2} \sin\frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi R_0^2}{2} \sin\theta d\theta$$

Вводя телесный угол (1.15.13) и разделив на него, получаем дифференциальное сечение (1.15.15) в виде:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R_0^2}{4}, \quad (1.15.17)$$

а полное сечение рассеяния на твердом шаре равно:

$$\sigma = \frac{\pi R_0^2}{2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \pi R_0^2 \quad (1.15.18)$$

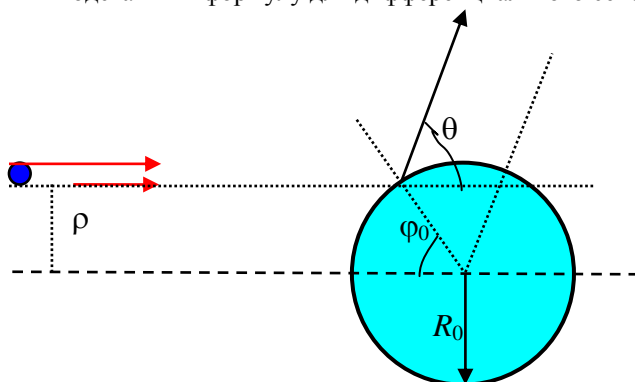


Рис. 15.6

Полученный результат для полного сечения рассеяния можно проинтерпретировать следующим образом: чтобы частице вообще рассеяться на твердом шаре, ей

надо попасть в прицельную площадь, равную площади сечения шара. Тогда в любом случае произойдет рассеяние. А чтобы рассеяться в единицу телесного угла (дифференциальное сечение), ей достаточно попасть в площадку размером, определяемым соотношением (1.15.17). Причем дифференциальное сечение рассеяния одинаково для всех углов рассеяния.

### 1.15.4. Кулоновское рассеяние.

Рассеяние на кулоновском центре описывается формулой Резерфорда. Получим ее, учитывая связь между  $\rho$ ,  $\varphi_0$  и  $\theta$  (см формулу (1.15.4)). Запишем квадрат прицельного параметра, который продифференцируем и подставим в формулу для сечения (1.15.14):

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{\alpha^2}{m^2 v^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \\ 2\rho d\rho &= -\frac{\alpha^2}{m^2 v^4} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned} \quad (1.15.19)$$

Для дифференциального сечения имеем:

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi\alpha^2}{m^2 v^4} \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{2\pi\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}} = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

И окончательно получаем сечение в следующем виде:

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\text{Sin}^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1.15.20)$$

Формула Резерфорда получается, когда для рассеяния  $\alpha$ - частиц положим  $\alpha = 2Ze^2$  :

$$d\sigma = \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\text{Sin}^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1.15.21)$$

Для сравнения с реальным экспериментом по рассеянию на фольгах необходимо еще просуммировать по числу ядер в  $1 \text{ см}^3$  –  $n_{nucl}$ , на которых возможно рассеяние  $\alpha$ - частиц. Если ядра по площади поперечного сечения не перекрывают друг друга, то измеряемое сечение  $d\sigma^{macro}$  равно:

$$d\sigma^{macro} = n_{nucl} d\sigma \quad (1.15.22)$$

Реально Резерфордом с коллегами проверялась следующая величина:

$$dN \cdot \text{Sin}^4 \frac{\theta}{2} = n\nu \cdot n_{nucl} \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 d\Omega \quad (1.15.23)$$

Условия эксперимента не менялись, тогда правая часть уравнения (1.15.23) остается постоянной и число рассеянных частиц под углами  $\theta$  должно быть пропорционально

$$dN \sim \frac{1}{\text{Sin}^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Это и было получено на опыте. Таким образом, опытами Резерфорда, Гейгера и Марсдена и сравнением с формулой Резерфорда удалось установить, что  $\alpha$ - частицы рассеивает точечный центр с положительным зарядом. Этот массивный центр – *ядро атома*. Теоретическое объяснение этих экспериментов привело Резерфорда к созданию планетарной модели атома: в центре атома находится массивный положительный заряд, малых размеров по сравнению с размерами атома, в поле которого движутся электроны.