1.16. Вращение твердого тела.

1.16.1. Движение твердого тела.

Твердое тело – система материальных точек, расстояние между которыми неизменно. Такое определение справедливо для абсолютно твердого тела, в реальности это является приближением.

Движение твердого тела, иначе перемещение любой точки твердого тела, всегда можно разбить на 2 движения: *поступательное* и *вращательное*. В механике доказывается общая теорема (правило): произвольное движение твердого тела можно представить в виде совокупности поступательного движения всего тела со скоростью какой-либо его точки 0 и вращения этого тела вокруг оси, проходящей через эту точку.

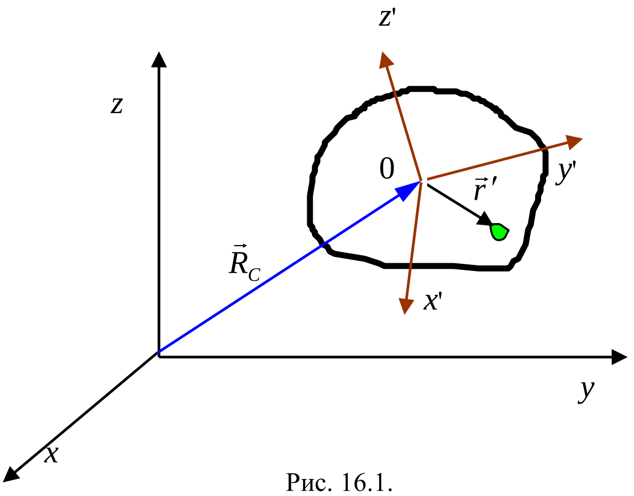

Рис. 16.1.

Для описания движения твердого тела обычно вводят 2 системы координат: (x,y,z) – лабораторная система и (x',y',z') – система, связанная с точкой 0 (см рис. 16.1). При этом поступательная скорость тела $\vec{V}$ зависит от того, какую точку 0 выбрать в качестве основной точки отсчета. Угловая скорость $\vec{\omega}$ от этого выбора не зависит: она абсолютна.

Обычно в качестве основной точки выбирают центр инерции тела, определяемый радиус-вектором $\vec{R}_c$ и скоростью перемещения $\vec{V}_c$. Бесконечно малые перемещения любой точки твердого тела и скорость этой точки относительно лабораторной системы координат записываются:

$$d\vec{r} = d\vec{R}_c + [d\vec{\varphi}, \vec{r}\,'] \qquad (1.16.1)$$

$$\vec{v} = \vec{V}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}\,']$$

Как и для системы материальных точек можно написать 2 векторных уравнения, которые полностью описывают движение твердого тела:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (1.16.2)$$

Итак, 6 переменных (3 поступательных и 3 вращательных) описывают движение твердого тела, и, соответственно, имеется 6 уравнений. Это позволяет решить задачу о движении твердого тела.

1.16.2. Вращение вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим твердое тело в системе центра инерции – СЦИ, тогда мы имеем дело только с вращательным движением. Положим для простоты, что эта ось неподвижна в пространстве (в общем случае не так). Тогда для материальной точки массы m можно записать:

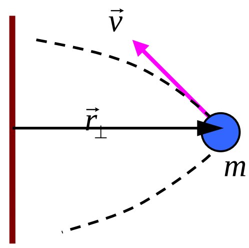

Рис. 16.2.

$$\left|\vec{L}\right| = L = \left|m[\vec{r}, \vec{v}]\right| = mr_\perp v = mr_\perp{}^2\omega \qquad (1.16.3)$$

Здесь $r_\perp$ – расстояние от оси вращения до материальной точки, L проекция МИ на ось вращения. Для системы материальных точек проекция МИ на ось вращения может быть получена суммированием по материальным точкам, учитывая, что угловая скорость одинакова для всех точек системы:

$$L = \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 \omega = I\omega \qquad (1.16.4)$$

Здесь мы ввели *момент инерции* системы I относительно оси:

$$I \equiv \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 \qquad (1.16.5)$$

(см также ниже Примечание 1).

Определение: Величина I, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения, называется *моментом инерции системы относительно этой оси*.

Момент инерции во вращательном движении играет ту же роль, что и масса в поступательном движении. Момент инерции относительно оси определяет инертность тела при повороте вокруг данной оси. Момент инерции твердого тела зависит от распределения масс относительно интересующей нас оси и является величиной аддитивной. Для твердого тела момент инерции определяется:

$$I = \int r_\perp^2 \rho dV = \int r_\perp^2 dm \qquad (1.16.6)$$

где $r_\perp$ – расстояние от элемента объема dV до оси вращения, $\rho = \rho(\vec{r})$ – плотность вещества в данной точке. Элемент объема dV выбирается в зависимости от системы координат:

в декартовой системе координат $dV = dxdydz$,

в цилиндрической $dV = r_\perp dr_\perp d\varphi dz$,

в сферической системе $dV = r^2 dr Sin\theta d\theta d\varphi$.

Момент инерции твердого тела зависит от положения оси вращения. Рассмотрим моменты инерции для нескольких вращающихся тел, представленных на рис. 16.3 (подробнее см следующий параграф 1.17).

а). Диск радиуса R и ось вращения проходит через диаметр диска, тогда его момент инерции относительно такой оси вращения равен:

$$I = \frac{1}{4} mR^2 \qquad (1.16.7)$$

где m – масса диска.

б). Тот же диск радиуса R, а ось вращения проходит через его центр и вдоль оси симметрии, тогда его момент инерции равен:

$$I = \frac{1}{2} mR^2 \qquad (1.16.8)$$

в). Момент инерции шара массы m и радиуса R относительно оси, проходящей через его центр, определяется:

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \qquad (1.16.9)$$

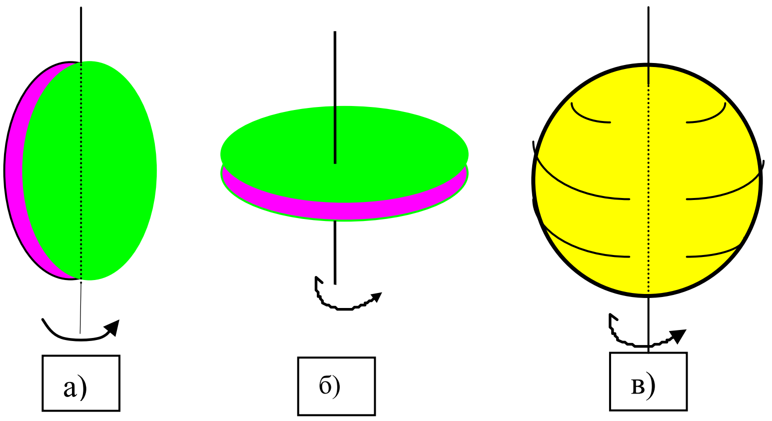

Рис. 16.3.

Уравнение моментов записывается, как и прежде в виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (1.16.10)$$

Для симметричных волчков, когда ось вращения проходит по оси симметрии можно написать:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (1.16.11)$$

Тогда можно записать уравнение движения твердого тела относительно неподвижной оси:

$$\vec{M} = \frac{d\left(I\vec{\omega}\right)}{dt} \qquad (1.16.12)$$

Если момент инерции тела во время движения не меняется ($I = const$), то получаем следующее уравнение:

$$M = I\frac{d\omega}{dt}\ , \qquad (1.16.13)$$

где M момент внешних сил относительно оси вращения. Уравнение (1.16.13) – аналог 2-го закона Ньютона при записи через массу тела.

Примечание 1. Для несимметричного (или неоднородного) тела (рис. 16.4) момент импульса $\vec{L}$, вообще говоря, не совпадает по направлению с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$. Из рисунка 16.4 видно, что для симметричной части тела относительно оси угловая скорость совпадает по направлению с МИ. Однако момент импульса каждой части, не входящей в симметричную часть, дает $\vec{L}_i$. Из-за этой части получаем отклонение направлений МИ и угловой скорости. При вращении $\vec{L}$ описывает конус $d\vec{L} = \vec{M}_{ext}dt$, «нанизанный» на ось вращения. Однако выражение для проекции МИ на ось вращения остается всегда правильным:

$$L_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega = I\omega ,$$

где r_i – опять расстояние элемента объема массы Δm_i до оси.

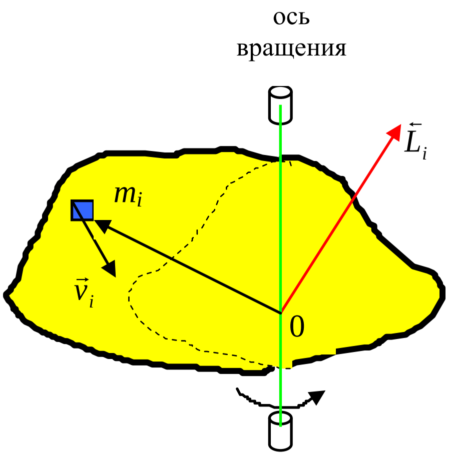

Рис. 16.4.

Примечание 2. Демонстрация закона сохранения момента импульса в замкнутой системе – скамья Жуковского. Рассматривается система: вращающаяся скамья + демонстратор, сидящий на скамье (момент внешних сил $\vec{M}_{ext} \approx 0$, если пренебречь силами трения). 1). Демонстратор вращается на скамье и держит в руках гири. Поскольку $\vec{M}_{ext} \approx 0$ и тогда $I\omega = const$, то при разведении рук с гирями - угловая скорость уменьшается, так как увеличивается момент инерции системы относительно оси вращения. 2). Демонстратор на покоящейся скамье держит вращающееся велосипедное колесо. Поскольку сохраняется МИ вдоль оси вращения, то при изменении угла вращения колеса (руками демонстратора) скамья также приходит в движение, чтобы сохранить МИ вдоль оси вращения.

1.16.3. Кинетическая энергия вращающегося тела.

Энергия поступательного движения твердого тела $K = \frac{1}{2}mv^2$, где v – скорость, одинаковая для всех точек тела. Кинетическую энергию вращающегося тела в системе центра инерции (СЦИ) получим, разбив тело на маленькие кусочки и учитывая, что угловая скорость ω одинаковая для всех точек (рис. 16.5):

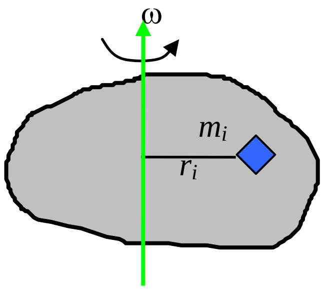

Рис. 16.5.

$$v_i = \omega r_{\perp i}, \quad \Delta E_{kin} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{\perp i}^2 \tag{1.16.14}$$

Здесь $r_i = r_{\perp i}$ – расстояние до оси вращения. Проводя суммирование по всем кусочкам или интегрирование по объему тела, получим:

$$E_{вр} = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int r_\perp^2 dm = \frac{I\omega^2}{2} \tag{1.16.15}$$

Для твердого тела, участвующего в поступательном и вращательном движении, кинетическую энергию можно представить в виде суммы, если ось вращения проходит через центр инерции:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} \tag{1.16.16}$$

где I_0 – момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции. Формула (1.16.16) справедлива для, так называемого, *плоского движения*, это такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно одной плоскости. Иначе, центр системы совершает движение лишь в плоскости, тогда в СЦИ остается только вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр инерции. Покажем это. Пусть в системе центра инерции К' кинетическая энергия равна:

$$E' = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 .$$

Тогда в лабораторной системе К в соответствие с (1.16.1) имеем:

$$E = \sum_i \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{\Delta m_i}{2}\left(\vec{V} + [\vec{\omega}, \vec{r}_i']\right)^2 = \sum_i \frac{\Delta m_i V^2}{2} + \sum_i \frac{\Delta m_i}{2}\omega^2 r_i'^2 + \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} 2\left(\vec{V}, [\vec{\omega}, \vec{r}_i']\right) \tag{1.16.17}$$

Здесь $\vec{V}$ – скорость центра инерции (или скорость системы К'). Последний член в (1.16.17) преобразуем с помощью формулы векторной алгебры (в смешанном произведении векторов можно производить циклическую перестановку векторов):

$$\sum_i \frac{\Delta m_i}{2} 2\left(\vec{V},[\vec{\omega},\vec{r}_i']\right) = \sum_i \Delta m_i \left(\vec{r}_i',[\vec{V},\vec{\omega}]\right) = \left(\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i',[\vec{V},\vec{\omega}]\right) = 0$$

Здесь мы воспользовались тем, что для системы центра инерции $\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i' = 0$. Таким образом, получаем кинетическую энергию вращающегося тела в виде (1.16.16):

$$E_{kin} = \frac{V^2}{2}\sum_i \Delta m_i + \frac{\omega^2}{2}\sum_i \Delta m_i r_i'^2 = \frac{mV^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} \qquad (1.16.18)$$

Рассмотрим пример.

Скатывание шара по наклонной плоскости с высоты h без проскальзывания с начальной нулевой скоростью (рис. 16.6). Найдем скорость перемещения шара в конце спуска. Из закона сохранения энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} + mgh = const$$

имеем:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}$$

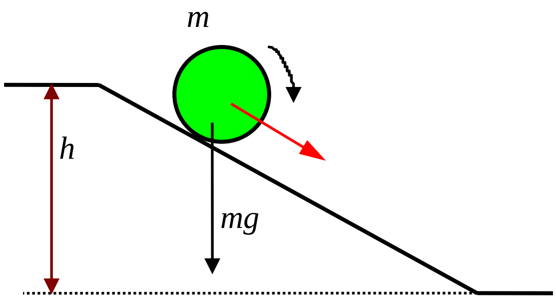

Рис. 16.6.

Условие движения без проскальзывания означает, что линейная скорость центра масс связана с угловой скоростью $v = \omega r$, момент инерции шара (см (1.16.9)) равен $I_0 = \frac{2}{5}mr^2$. Тогда находим скорость шара в конце спуска:

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \qquad (1.16.19)$$

1.16.4. Гироскоп

Гироскопом называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии. Поскольку ось гироскопа совпадает с одной из главных осей инерции, то пользуемся уравнением (1.16.11)

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

где I – момент инерции гироскопа относительно этой оси; $\vec{\omega}$ – угловая скорость собственного вращения.

Если суммарный момент внешних сил, действующих на гироскоп, равен нулю, то момент его импульса постоянный. Отсюда следует важное для практического применения свойство гироскопа сохранять неизменным направление оси в пространстве. Если к вращающемуся гироскопу приложить момент сил, который стремится повернуть его вокруг оси, перпендикулярной оси вращения гироскопа, то он станет поворачиваться вокруг третьей оси, перпендикулярной первым двум. Такое поведение гироскопа полностью соответствует законам динамики вращательного движения.

Точное решение задачи о вращении гироскопа относительно произвольных осей сопряжено с математическими трудностями. Рассмотрим приближенное решение этой задачи для простейшего случая.

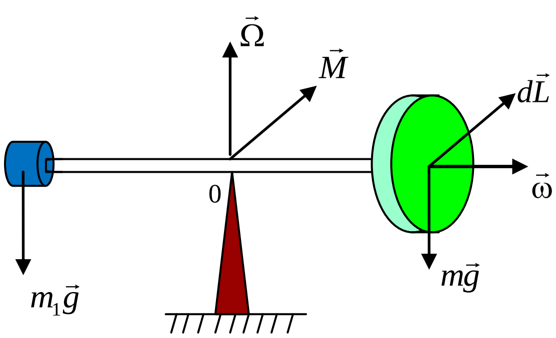

Рис. 16.7

Пусть гироскоп представляет собой насаженный на ось массивный диск массы m, который вращается с большой угловой скоростью ω, как показано на рис. 16.7, и уравновешен с помощью подвижного груза массой m_1. Момент импульса диска направлен вдоль оси вправо, как и вектор угловой скорости, и если момент внешних сил (силы тяжести) равен нулю, то

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = const$$

Если переместить груз m_1 вправо, то нарушается равновесие в горизонтальном направлении и возникает суммарный момент внешних сил $\vec{M}$ относительно центра вращения 0, направленный перпендикулярно плоскости чертежа к наблюдателю. В силу уравнения моментов (1.16.10)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

ось гироскопа повернется за плоскость чертежа (от нас), поскольку приращение момента импульса гироскопа $d\vec{L} = \vec{M}dt$ имеет такое же направление, как и $\vec{M}$. Таким образом, за время dt ось симметрии гироскопа повернется в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси на некоторый угол $d\varphi$. Поскольку вектор $\vec{M}$ продолжает оставаться перпендикулярным оси гироскопа, то ось все время будет вращаться в горизонтальной плоскости с угловой скоростью

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (1.16.20)$$

Вращение гироскопа под действием момента сил называется *прецессией*.

Чем меньше приращение момента импульса, тем меньше угловая скорость прецессии. Если $\Omega << \omega$, то бесконечно малое приращение угла $d\varphi$ можно определить из отношения:

$$d\varphi = \frac{dL}{L} \qquad (1.16.21)$$

Подставляя это значение в равенство (1.16.20), получаем для модуля угловой скорости прецессии:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{Ldt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\omega} \qquad (1.16.22)$$

Угловая скорость прецессии прямо пропорциональна моменту сил и обратно пропорциональна моменту инерции I и угловой скорости собственного вращения ω гироскопа. Нетрудно получить векторное соотношение

$$\left[\vec{\Omega}, \vec{L}\right] = \vec{M} \qquad (1.16.23)$$

Из уравнения (1.16.22) видно, что момент силы M определяет угловую скорость прецессии (а не ускорение). Поэтому говорят, что прецессия не имеет инерции: мгновенное устранение момента силы M приводит к мгновенному исчезновению и прецессии.

Момент действующих на гироскоп сил может иметь любую природу. Для обеспечения регулярности прецессии, т.е. постоянства угловой скорости Ω, важно, чтобы вектор $\vec{M}$, не изменяясь по модулю, поворачивался вместе с осью гироскопа.

Заметим, что при кратковременном действии на ось гироскопа даже довольно большой силы, вызывающей временное несовпадение оси вращения и главной оси инерции, наблюдаются лишь колебания оси, называемое *нутацией*. При наличии трения такие колебания затухают.

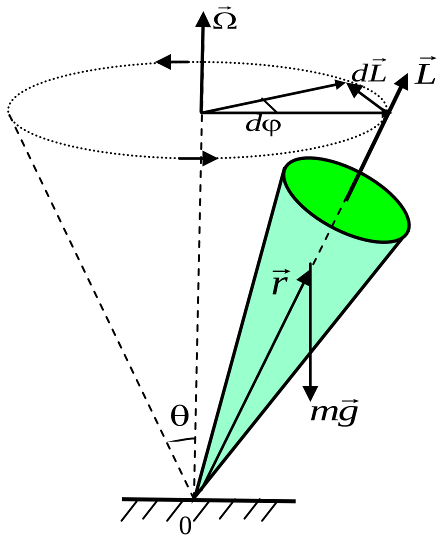

Рис.16.8

Другой часто встречающийся вид гироскопа – так называемый *волчок* (рис. 16.8). Опыт показывает, что если ось вращающегося волчка отклонена от вертикали на некоторый угол θ, то волчок не падает под действием силы тяжести, а совершает прецессионное движение. Его ось, определяемая векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{L}$, описывает конус вокруг вертикали с некоторой угловой скоростью Ω. И чем больше угловая скорость ω вращения волчка вокруг своей оси, тем меньше угловая скорость прецессии Ω.

Под действием момента силы тяжести $\vec{M} = \left[\vec{r}, m\vec{g}\right]$ момент импульса гироскопа получает приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$. Из рис. 16.8 видно, что $d\vec{L} \perp \vec{L}$. В результате вектор $\vec{L}$, а значит, и ось волчка будут поворачиваться вокруг вертикальной оси, описывая круговой конус.

Найдем угловую скорость прецессии наклоненного волчка массой m, который вращается с большой угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии. Пусть момент инерции волчка относительно этой оси равен I, а центр масс находится на расстоянии r от точки опоры. Из выражения (1.16.22) получаем угловую скорость прецессии:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{L\sin\theta dt} = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{mgr\sin\theta}{I\omega\sin\theta} = \frac{mgr}{I\omega} \tag{1.16.24}$$

Отметим, что если ось гироскопа закреплена в подставке и подставка поворачивается под действием внешних сил, то это в общем случае приводит к приращению момента импульса $d\vec{L}$. Это означает, что на гироскоп действует момент сил $\vec{M}$ со стороны подставки, который совпадает по направлению с вектором $d\vec{L}$. Ось же гироскопа в соответствии с третьим законом Ньютона будет действовать на подставку с противоположным по направлению моментом сил. Эти силы называют гироскопическими, они создают гироскопический момент $\vec{M}' = -\vec{M}$. Гироскопический эффект лежит в основе конструкций разных приборов: гирокомпаса, «искусственного горизонта» в самолетах, гироскопического успокоителя качки корабля, гироскопического стабилизатора положения ракеты и др. В ряде случаев при наличии в механизмах частей с быстрым вращением гироскопические силы могут оказывать вредное влияние. Например, при резком повороте корабля быстро вращающаяся ось турбины оказывает значительное дополнительное давление на подшипники, что может привести к их разрушению.

Приложение 1.

Еще раз напомним об аналогии между двумя видами движения:

Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\Leftrightarrow$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$	угловая скорость,	их связь:	$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\Leftrightarrow$	$\vec{L}$	момент импульса,	их связь:	$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$
Масса	m	$\Leftrightarrow$	I	момент инерции,		$I = \int r_{\perp}^2 dm$
Уравнение движения	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\Leftrightarrow$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	уравнение моментов		
Работа сил	$dA = \vec{F}d\vec{r}$	$\Leftrightarrow$	$dA = \vec{M}d\vec{\varphi}$	работа момента сил		
