

## 1.17. Момент инерции.

### 1.17.1. Моменты инерции диска и шара.

Одна из задач механики связана с определением характеристик вращательного движения. Для этого часто необходимо знать моменты инерции тел относительно различного расположения осей вращения. В качестве примера сосчитаем моменты инерции диска и шара относительно осей симметрии.

1) Момент инерции диска (цилиндра) относительно оси симметрии (проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости рис. 17.1). Пусть масса однородного диска  $m$ , а его радиус и толщина равны  $R$  и  $h$ , соответственно. Тогда момент инерции маленького кусочка  $dm$  равен:

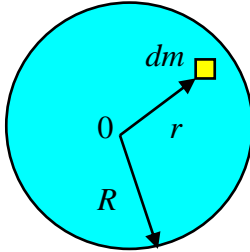


Рис. 17.1.

$$d^2I = r^2 dm = r^2 \rho dV = \rho r^2 \cdot h r dr d\phi = \rho h r^3 dr d\phi \quad (1.17.1)$$

где  $\rho$  – плотность вещества диска,  $r$  – расстояние до оси вращения, а элемент объема  $dV$  взят в цилиндрической системе координат. Напомним, что объем всего диска или цилиндра равен  $V = \pi R^2 h$ . Интегрируя выражение (1.17.1) по углу  $\phi$  и радиусу  $r$ , получаем момент инерции диска (цилиндра):

$$I = \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi = \rho h \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{1}{2} R^2 \cdot \rho \pi R^2 h$$

$$I = \frac{1}{2} m R^2 \quad (1.17.2)$$

Получили формулу (1.16.8), которую приводили ранее в параграфе 1.16.

2) Момент инерции однородного шара массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси проходящей через центр. Удобнее его вычислять в сферической системе координат. Тогда момент инерции маленького кусочка шара  $dm$  равен:

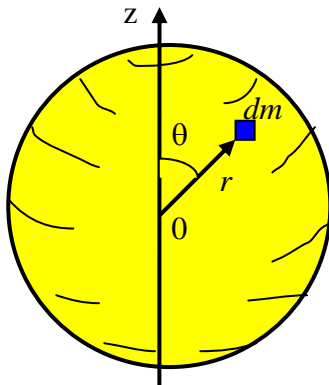


Рис. 17.2.

$$d^3I = (r_{\perp})^2 dm = (r \sin \theta)^2 \rho dV = \rho (r \sin \theta)^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

где  $r_{\perp} = r \sin \theta$  – расстояние кусочка массы  $dm$  до оси вращения,  $\rho$  – плотность шара. Интегрируя по всем переменным:

$$I = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (1.17.3)$$

и учитывая, что масса шара равна  $m = \frac{4}{3} \rho \pi R^3$ , получаем момент инерции шара относительно оси симметрии:

$$I_{ш} = \frac{2}{5} m R^2 \quad (1.17.4)$$

Достаточно просто вычисляются моменты инерции относительно оси, проходящей через центр симметрии и центр инерции. Однако непосредственно вычислять момент инерции относительно произвольной оси достаточно сложно. В этом случае помогает теорема Штейнера.

### 1.17.2. Теорема Штейнера.

Теорема Штейнера гласит (см рис. 17.3):

*Момент инерции  $I$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_c$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.*

$$I = I_c + m a^2 \quad (1.17.5)$$

Так, например, для диска момент инерции относительно оси  $O'$ , проходящей через край диска перпендикулярно его плоскости, равен:

$$I_{O'} = I_0 + m R^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2 \quad (1.17.6)$$

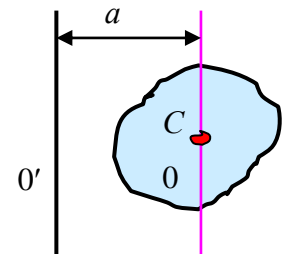


Рис. 17.3.

Докажем теорему Штейнера. Пусть точка  $C$  – центр инерции тела (см рис. 17.4), ось проходит перпендикулярно к плоскости чертежа, таким же образом проходит ось через точку  $O$ . Вектор  $\vec{a}$  – вектор от точки  $O$  к точке  $C$ . Выберем кусочек  $dm_i$  и проведем вектора  $\vec{R}_i$  и  $\vec{R}'_i$ . При этом

$$\vec{R}'_i = \vec{a} + \vec{R}_i \quad (1.17.7)$$

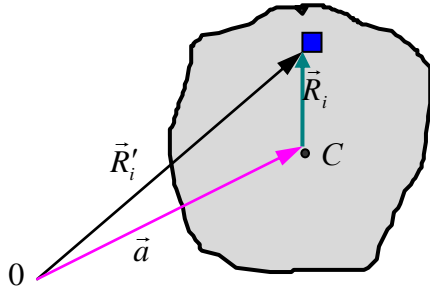


Рис. 17.4.

Тогда момент инерции относительно точки  $O$  равен:

$$I_0 = \sum_i \Delta m_i R_i'^2 = a^2 \sum_i \Delta m_i + 2\vec{a} \sum_i \Delta m_i \vec{R}_i + \sum_i \Delta m_i R_i^2 \quad (1.17.8)$$

Последнее слагаемое в (1.17.8) дает момент инерции относительно оси, проходящий через центр инерции, т.е.  $I_C$ .

Второе слагаемое равно нулю, т.к. сумма  $\sum_i \Delta m_i \vec{R}_i = 0$  для

точки, являющейся центром инерции (эта сумма определяет радиус-вектор центра инерции, который равен нулю, если отсчитывать от самого центра инерции). Итак, получаем теорему Штейнера – соотношение (1.17.5), что и требовалось доказать.

### 1.17.3. Главные моменты инерции.

В принципе тело при вращении вокруг различных осей, проходящих через центр инерции, имеет различные моменты инерции. Так, момент инерции диска относительно оси, изображенной на рисунке 17.5, имеет другое значение, чем относительно оси симметрии, при этом момент импульса не совпадает по направлению с вектором угловой скорости. Вращение вокруг такой оси является неустойчивым.

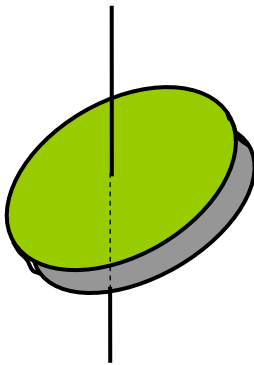


Рис. 17.5.

Можно доказать, что для тела любой формы и с произвольным распределением массы существуют 3 взаимно перпендикулярные, проходящие через центр инерции тела, оси, которые могут служить *свободными осями*. Это такие оси, положение которых в пространстве остается неизменным при вращении вокруг нее тела в отсутствие внешних сил. Иначе говоря, для сохранения вращения не нужно прикладывать внешние силы. Это такие оси, при вращении вокруг которых направление вектора  $\vec{L}$  совпадает с направлением вектора  $\vec{\omega}$ .

Три такие оси называются *главными осями инерции тела*, а моменты инерции относительно их называются *главными моментами инерции*.

Примеры главных осей для цилиндра изображены на рисунке 17.6, а для параллелепипеда – на рис. 17.7.

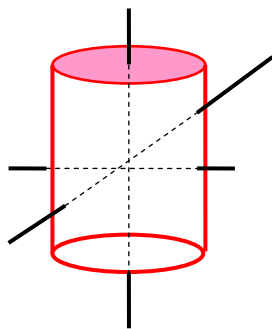


Рис. 17.6.

Рассмотрим основные определения и выводы, которые следуют из исследования вращения твердых тел.

Для тел с центральной симметрией все главные моменты инерции равны друг другу –  $I_1 = I_2 = I_3$ . Это, так называемые, *шаровые волчки*.

Для тел с осевой симметрией –  $I_1 = I_2 \neq I_3$  имеем дело с *симметричными волчками*.

В общем случае все главные моменты инерции различны:  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ . Это *асимметричные волчки*.

Вращение вокруг осей, соответствующее максимальным и минимальным значениям момента инерции, является устойчивым, а вокруг других – неустойчивым.

Рассмотрим в качестве примера вращение коробка спичек (рис. 17.7). Можно «экспериментально» установить устойчивые оси вращения: одна ось проходит через центр грани с наибольшей поверхностью (на рис. 17.7 ось 1-1), другая ось – через центр грани с наименьшей поверхностью (ось 3-3).

При внешнем воздействии наиболее устойчивым является то вращение, которое соответствует максимальному значению главного

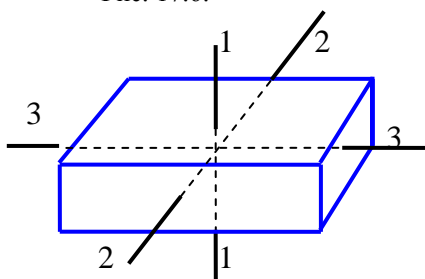


Рис. 17.7.

момента инерции. Рассмотрим, как пример, вращение диска, закрепленного за его край с помощью нити (см рис. 17.8). Диск при установившемся вращении выстраивается так, чтобы ось вращения проходит через ось симметрии, относительно которой имеется максимальный момент инерции как показано на рисунке 17.8.

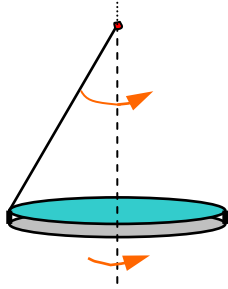


Рис. 17.8.

Итак, для вращения вокруг свободных (главных) осей имеем

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} L_x = I_1\omega_x \\ L_y = I_2\omega_y \\ L_z = I_3\omega_z \end{cases} \quad (1.17.9)$$

Последние равенства справедливы, если оси  $(x,y,z)$  совпадают с главными осями вращения.

Однако если вращение происходит вокруг произвольных осей и оси  $(x,y,z)$  ориентированы произвольно, то связь между компонентами становится более сложной:

$$\begin{cases} L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{cases} \quad (1.17.10)$$

Здесь  $I_{ik}$  – коэффициенты пропорциональности, имеющие размерность момента инерции. Недиagonальные коэффициенты характеризуют вклад перпендикулярных компонент угловой скорости в выбранную компоненту момента импульса.

Приведем несколько частных случаев уравнений (1.17.10).

- 1) Пусть  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$  и  $I_{ij} = 0$  (при  $i \neq j$ ), тогда получаем более простое уравнение для связи момента импульса и угловой скоростью  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ .
- 2) Если ось вращения направлена вдоль оси  $z$ , то есть  $\omega_z \neq 0$ , а остальные проекции угловой скорости равны нулю –  $\omega_x = \omega_y = 0$ , то получаем  $L_x = I_{xz}\omega_z$ ,  $L_y = I_{yz}\omega_z$ ,  $L_z = I_{zz}\omega_z$ .

В общем случае совокупность всех этих 9 величин  $I_{ik}$  – тензор 2-го ранга – *тензор инерции*. Он представляется в виде таблицы:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.17.11)$$

Операция, определяемая (1.17.10), – это умножение вектора  $\vec{\omega}$  на тензор  $\hat{I}$ , в результате получаем новый вектор  $\vec{L}$ . Короткая запись уравнений (1.17.10) имеет вид:

$$L_i = \sum_{k=x,y,z} I_{ik}\omega_k, \quad i = x, y, z \quad (1.17.12)$$

Тензор инерции характеризует инертные свойства тела при вращении.

#### 1.17.4. Компоненты тензора инерции.

Найдем выражение для тензора инерции. Запишем момент импульса как сумму моментов импульса кусочков массы:

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] = \sum_i m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] \quad (1.17.13)$$

где вектор  $\vec{r}_i$  откладываем от центра масс. Двойное векторное произведение раскладываем по известному правилу векторной алгебры “БАЦ-«минус»-ЦАБ” (легко проверить это правило, расписывая векторные произведения):

$$\begin{aligned} [\vec{A}[\vec{B}, \vec{C}]] &= \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}) \\ \vec{L} &= \sum_i m_i \{ \vec{\omega}(\vec{r}_i, \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i, \vec{\omega}) \} = \sum_i m_i \{ \vec{\omega}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \vec{r}_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z) \} \end{aligned} \quad (1.17.14)$$

Найдем проекцию момента импульса на ось  $x$ :

$$\begin{aligned}
L_x &= \sum_i m_i \left\{ \omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right\} = \\
&= \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i = \omega_x I_{xx} + \omega_y I_{xy} + \omega_z I_{xz}
\end{aligned}$$

Откуда, рассматривая аналогично другие проекции, получаем тензор момента инерции в виде:

$$I \Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad (1.17.15)$$

Тензор симметричный:  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$  и  $I_{yz} = I_{zy}$ . Для протяженных тел (с непрерывным распределением массы) тензор и его компоненты вычисляются с помощью интегрирования, так, например:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm = \int \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dV \\
I_{xy} &= \int xy dm = \int xy \rho(x, y, z) dV
\end{aligned} \quad (1.17.16)$$

Если в качестве **координатных осей** ( $x, y, z$ ) взять **главные оси инерции**, то тензор становится диагональным:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (1.17.17)$$

---

**Примечание 1.** В математике доказывается, что любую матрицу можно привести к диагональному виду путем выбора осей (см например в литературе: Гантмахер, гл.10, §53).

---