1.18. Законы сохранения и симметрия пространства и времени.

1.18.1. Законы сохранения.

В предыдущих параграфах мы рассмотрели три закона сохранения для замкнутых систем: *закон сохранения энергии, импульса* и *момента импульса*.

Часто сохраняющиеся величины в механике (и в физике вообще) называют *интегралами движения*. Но всегда особенно выделяют эти три закона сохранения, поскольку их происхождение имеет глубокий смысл – они связаны со свойствами пространства и времени, их однородностью и изотропией. Для этих интегралов движения выполняется важнейшее свойство – *аддитивность*.

Такое утверждение, что законы сохранения есть следствие однородности и изотропии пространства и времени, встречается довольно часто. Однако было бы неверно подумать, что указанных свойств пространства и времени достаточно, чтобы вывести эти законы сохранения. Все перечисленные законы есть следствие законов движения (например, 2-го закона Ньютона). Поэтому необходимо понимать следующее: законы сохранения можно получить из 2-го закона Ньютона, если к нему присоединить свойства симметрии пространства и времени.

Что такое однородность времени, пространства и изотропия пространства? Необходимо дать точные характеристики и определения.

1). *Однородность времени* означает, что если в два любые момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то, начиная с этих моментов, все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.

2). *Однородность пространства* означает, что если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений.

3). *Изотропия пространства* означает то же (что в п. 2) по отношению к повороту системы на заданный угол.

Эти свойства пространства и времени – *фундаментальное обобщение опытных фактов*.

1.18.2. Закон сохранения импульса и однородность пространства.

Итак, в силу однородности пространства механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. Для замкнутой системы закон сохранения импульса формально следует из 2-го и 3-го законов Ньютона:

$$\vec{F}_{ext} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{1.18.1}$$

Однако справедливость 3-го закона Ньютона и закона сохранения импульса *обусловлены однородностью пространства*. Пусть мы имеем внутренние силы $\vec{F}_i$, действующие в замкнутой системе. Однородность пространства означает следующее: перенесем все частицы системы в пространстве на расстояние $d\vec{r}$ и, поскольку ничего не может измениться, заключаем, что работа всех внутренних сил (работа над i -ой частицей $\vec{F}_i d\vec{r}$), которая всегда равна изменению потенциальной энергии, должна быть равна 0. Запишем это условие:

$$\vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + ... = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\right) d\vec{r} = 0 . \tag{1.18.2}$$

Или иначе, вспоминая, что полная сила на i частицу равна сумме сил со стороны каждой другой частицы, получим:

$$d\vec{r} \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = 0 \tag{1.18.3}$$

В силу произвольности $d\vec{r}$ получаем закон сохранения импульса:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... = 0 = \frac{d\vec{p}}{dt}; \qquad \vec{p} = const \tag{1.18.4}$$

Переписывая это иначе

$$\sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = 0 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right), \tag{1.18.5}$$

в силу независимости взаимодействия каждой из пар частиц друг с другом получаем 3-ий закон Ньютона:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \tag{1.18.6}$$

Примечание 1. Если у нас носителями импульса являются не только материальные тела, но и поле, то 3-ий закон Ньютона в этой формулировке неприменим. Нужно учитывать поле, его импульс, и тогда снова для замкнутой системы получим $\vec{p} = const$ из свойства однородности пространства.

1.18.3. Закон сохранения момента импульса и изотропия пространства.

Для замкнутой системы момент внешних сил равен нулю $\vec{M}_{ext} = 0$. Изотропия означает, что если замкнутую систему повернуть на какой-нибудь угол в пространстве, то ничего не изменится (рис. 18.1). Пусть $\vec{M}_i$ – моменты внутренних сил относительно неподвижной точки 0. Повернем всю систему на угол $d\alpha$. Из изотропии следует, что работа моментов сил должна быть равна нулю:

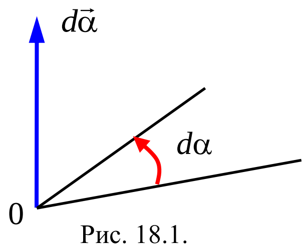

Рис. 18.1.

$$dA = \vec{M}_1 d\vec{\alpha} + \vec{M}_2 d\vec{\alpha} + \ldots = 0 \tag{1.18.7}$$

В силу произвольности угла поворота $d\alpha$ заключаем, что сумма моментов внутренних сил равна 0:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots = \sum_i \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \tag{1.18.8}$$

И отсюда следует закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L} = const \tag{1.18.9}$$

Таким образом, закон сохранения момента импульса связан с изотропией пространства.

1.18.4. Закон сохранения энергии и однородность времени.

Из динамики получаем следствие 2-го закона Ньютона - работа сил над механической системой равна приращению ее кинетической энергии K:

$$A_{12} = K_2 - K_1 \tag{1.18.10}$$

Пусть на i-ую частицу действует сила $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$, компоненты которой определяются:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{1.18.11}$$

В самом общем случае потенциальная энергия U (например, для незамкнутой системы) зависит еще от времени t: $U = U(x,y,z,t)$. Поэтому полное приращение U включает также и производную по времени (т.е. полный дифференциал функции):

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \frac{\partial U}{\partial t}dt\,. \tag{1.18.12}$$

При этом конечное приращение потенциальной энергии при переходе из состояния 1 в состояние 2 определяется интегралом:

$$\int_1^2 dU(x,y,z,t) = U_2 - U_1, \tag{1.18.13}$$

где 1 и 2 в принципе могут означать разные пространственные точки и разные времена. Запишем более подробно работу сил при пространственном перемещении из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = -\int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) \Rightarrow$$

Чтобы в скобках появился полный дифференциал, и можно было бы воспользоваться (1.18.13), добавим и вычтем частную производную по времени:

$$\Rightarrow -\int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \frac{\partial U}{\partial t}dt\right) + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}dt = -(U_2 - U_1) + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}dt \tag{1.18.14}$$

Складывая так для всех частиц, получаем из равенства работ:

$$A_{12} = U_1 - U_2 + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt = K_2 - K_1 \tag{1.18.15}$$

Или переписывая (1.18.15), получаем:

$$(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt \tag{1.18.16}$$

Теперь пусть система замкнута. Однородность времени заключается в том, что в любой момент времени может одинаковым образом происходить развитие событий, т.е. потенциальная энергия не может явно зависеть от времени:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{1.18.17}$$

Тогда из (1.18.16) получаем закон сохранения энергии:

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \tag{1.18.18}$$

Вместо заключения. Между уравнениями динамики и законами сохранения имеется существенная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Законы сохранения обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени и поэтому они универсальны и всеобщи. Но они не дают указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены в природе. Законы сохранения выступают как запреты!

В процессе человеческой практики, опытов неоднократно возникали видимые нарушения закона сохранения энергии. Так, нет закона сохранения механической энергии в присутствии диссипативных сил – часть механической энергии переходит во внутреннюю энергию тела (тепло). До обнаружения слабо взаимодействующей частицы – нейтрино – нарушался закон сохранения энергии при слабых распадах элементарных частиц. В космологии часто возникали видимые нарушения законов сохранения.