1.3. Преобразования Галилея.

1.3.1. Принцип относительности Галилея.

Принцип относительности гласит: *Все инерциальные системы отсчета (ИСО) по своим физическим свойствам эквивалентны, т.е. никакими механическими опытами, проводимыми внутри ИСО, нельзя установить покоится ли эта система отсчета или движется равномерно и прямолинейно*.

Принцип относительности утверждает, что все законы механики (природы) инвариантны во всех ИСО. Рассмотрим две ИСО: К и К′ системы, изображенные на рис. 3.1. В каждой системе отсчета имеются свои тела отсчета в точках О и О' и свои часы. Любое событие с точки зрения наблюдателя из К системы характеризуется координатами и временем, пусть они равны (x,y,z,t). Пусть с точки зрения наблюдателя из К' системы эти величины равны «штрихованным» координатам (x',y',z',t'). Найдем связь между "штрихованными" и "нештрихованными" координатами и временем.

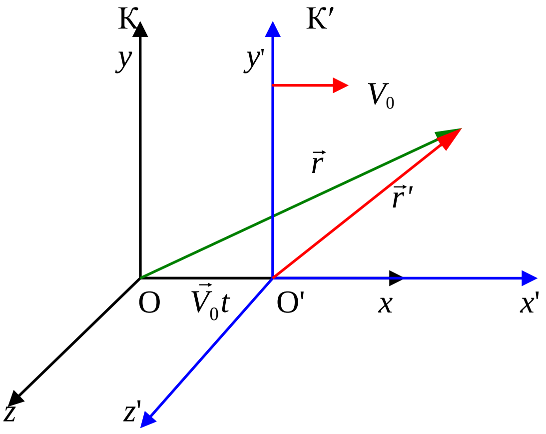

Рис. 3.1.

Итак, рассмотрим преобразование координат и времени события при переходе от системы К' к К, если скорость системы К' равна $\vec{V}_0$ и направлена вдоль оси x (рис. 3.1):

$$\begin{cases} x = x' + V_0 t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \tag{1.3.1}$$

В общем случае, когда направление скорости системы К′ относительно К системы произвольно, формулу преобразования координат при переходе от системы К′ к системе К можно записать в следующем виде:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}_0 t \tag{1.3.2}$$

Обратный переход от системы К к системе К′ записывается:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}_0 t' = \vec{r} - \vec{V}_0 t \tag{1.3.3}$$

Отметим, что согласно принципу относительности Галилея, все механические явления в ИСО К и К′ происходят одинаково. То есть движения тел отсчета в точках О и О′ друг относительно друга происходят с одной и той же скоростью и в К и в К′ системах:

$$V_0 = V_0'; \; \vec{V}_0 = -\vec{V}_0'.$$

Тогда сравнивая уравнения (1.3.2) и (1.3.3), находим, что $t = t'$, что уже было записано в (1.3.1). Это означает, что время "течет" одинаково во всех ИСО. Иначе говоря, равенство $t = t'$ – условие абсолютной одновременности событий. Время *инвариантно* во всех ИСО.

Для получения преобразования скорости дифференцируем радиус-вектор материальной точки по времени t в системе К:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.3.4}$$

и дифференцируем по времени t' в системе К′:

$$\vec{v}\,' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}\,'}{\Delta t'} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} \tag{1.3.5}$$

Итак, дифференцируя (1.3.2) и (1.3.3) по времени t и учитывая, что скорость $\vec{V}_0$ не зависит от времени, получаем преобразование Галилея для скорости:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}\,' + \vec{V}_0 \\ \vec{v}\,' &= \vec{v} - \vec{V}_0 \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Рассмотрим ускорение материальной точки:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{a}' \equiv \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta \vec{v}'}{\Delta t'} = \frac{d\vec{v}'}{dt} \tag{1.3.7}$$

Дифференцируя (1.3.6) по времени и учитывая, что скорость $\vec{V}_0$ постоянна, получаем *инвариантность ускорения* в любых ИСО:

$$\vec{a} = \vec{a}' \tag{1.3.8}$$

Таким образом, координаты и скорость материальной точки преобразуются при переходе от одной ИСО к другой, следуя преобразованиям Галилея, а ускорение остается инвариантным.

1.3.2. Инварианты и инвариантность законов Ньютона.

Помимо ускорения существуют и другие физические величины, которые остаются неизменными в различных ИСО, т.е. являются инвариантами. Рассмотрим важнейшие из них.

1) *Расстояние между двумя точками* – инвариант; что легко увидеть из (1.3.2) и (1.3.3); в самом деле имеем

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,' = \Delta\vec{r}\,' \tag{1.3.9}$$

2) *Относительная скорость двух тел* $\vec{v}_{отн}$ – инвариант; действительно, из (1.3.6) имеем

$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2\,' - \vec{v}_1\,' = \vec{v}\,'_{отн}; \tag{1.3.10}$$

3) *Сила* всегда есть функция разности координат (парная сила, например) и относительных скоростей (например, сила трения) $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$. Поэтому сила инвариантна относительно преобразований Галилея:

$$\vec{F} = \vec{F}' \tag{1.3.11}$$

Пример: Сила упругости в К системе имеет вид: $F = -k(x - x_0)$, где k – коэффициент упругости.

В К′ системе эта сила равна: $F' = -k(x' - x'_0)$.

Подставив преобразования координат $x' = x + vt$ и $x'_0 = x_0 + vt$, получаем:

$$F' = -k(x' - x'_0) = -k(x - vt - x_0 + vt) = -k(x - x_0) = F.$$

4) Масса – инвариант $m = m'$ при переходе от одной ИСО к другой.

Отсюда получаем важный результат: законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея. Так, второй закон Ньютона – *основное уравнение динамики* –

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i,$$
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \tag{1.3.12}$$
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

инвариантен в любой ИСО.

1.3.3. Уравнение движения тела с переменной массой.

Получим уравнение для движения тела с переменной массой, пользуясь инвариантностью законов в различных ИСО. В качестве примера рассмотрим движение ракеты. Пусть:

а) в момент времени t ракета имеет массу m;

б) присоединяемая (отделяемая) масса имеет скорость $\vec{u}$ относительно массы m;

в) рассмотрим ИСО, скорость которой $\vec{V} = \vec{v}$ совпадает со скоростью ракеты в момент времени t, такая система отсчета называется сопутствующей системой отсчета;

г) за время от t до $t + dt$ материальная точка приобретает импульс $md\vec{v}$ как за счет внешних сил $\vec{F}dt$, так и за счет присоединяемой (отделяемой) массы $dm \cdot \vec{u}$:

$$md\vec{v} = \vec{F}dt + \vec{u}dm$$

Разделив обе части на dt, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u} \tag{1.3.13}$$

Это – уравнение И.В. Мещерского. Оно описывает движение тела, к которому присоединяется масса со скоростью $\vec{u}$ (это определяется знаком “+” в уравнении (1.3.13)). В силу принципа относительности Галилея это уравнение справедливо в любой ИСО, а не только в сопутствующей ИСО, где оно было получено.

Рассмотрим частные случаи уравнения Мещерского.

А). Величину $\vec{F}_R = \vec{u}\dfrac{dm}{dt}$ в уравнении (1.3.13) обычно называют *реактивной силой*. Пусть движущееся тело теряет массу, т.е. $dm/dt < 0$, и скорость выброса массы $\vec{u}$ направлена в противоположную сторону скорости тела $\vec{v}$. Тогда реактивная сила есть сила ускорения (движение ракеты) $F_R > 0$.

Как меняется скорость ракеты, если внешняя сила равна нулю $\vec{F} = 0$? Тогда уравнение Мещерского для замкнутой системы “ракета-газ” (внешние силы равны нулю, а масса dm отделяется с относительной скоростью u) имеет вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{u},$$

и запишем проекции уравнения этого уравнения на направление движения, сократив на dt:

$$mdv = -udm$$

Если скорость истечения газов постоянна u, находим решение для скорости ракеты

$$v = -u\ln m + C$$

Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а масса равна $m = m_0$, то имеем:

$$v = -u\ln\frac{m}{m_0} = u\ln\frac{m_0}{m} \qquad (1.3.14)$$

Это уравнение К.Э. Циолковского.

Б). Если скорость $\vec{u} = 0$, то $\vec{F}_R = 0$ и уравнение похоже на основное уравнение динамики, но только с массой зависящей от времени $m = m(t)$:

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \qquad (1.3.15)$$

Пример такого движения: движение цистерны, из которой выливается вода.

В). Рассматривая случай, когда $\vec{u} = -\vec{v}$ (т.е. присоединяемая масса неподвижна в выбранной системе отсчета или отделяемая масса становится неподвижной в этой системе отсчета), имеем:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad (1.3.16)$$

т.е. получили основное уравнение динамики для тела с переменной массой. Пример такого движения: движущаяся платформа, на которую сыплется песок из неподвижного бункера.

Примечание 1. *Иван Всеволодович Мещерский, 1859-1935, русский и советский механик, с 1902 года профессор, заведующий кафедрой механики Политехнического института;*

Константин Эдуардович Циолковский, 1857-1935, русский и советский философ, изобретатель и школьный учитель, основоположник теоретической космонавтики
