

## 1.5. Центр инерции.

### 1.5.1. Центр инерции системы частиц.

**Центр инерции** (сокращения: ЦИ или ЦМ – *центр масс*) системы частиц есть точка, координаты которой определяются средним значением координат частиц, взятых с весовыми множителями, пропорциональными их массам. Так,  $X$  – координата ЦИ системы частиц определяется:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \quad (1.5.1)$$

Аналогично определяются другие координаты  $Y$  и  $Z$ .

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}, \quad Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \quad (1.5.1a)$$

Тогда в векторной форме радиус-вектор, определяющий положение центра инерции  $\vec{R}$ , может быть записан:

$$\vec{R} = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + Z\vec{e}_z \quad (1.5.2)$$

И учитывая, что координаты точек (частиц тела) могут быть записаны в векторной форме

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z, \\ \vec{r}_2 = x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z, \dots,$$

из (1.5.1)-(1.5.2) получаем:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M} \quad (1.5.3)$$

где  $M$  – полная масса системы  $N$  частиц.

Когда система материальных точек имеет непрерывное распределение масс (жидкое или твердое тело), то тело разбивается на маленькие кусочки массой  $\Delta m_i = \rho \Delta V_i$  ( $\rho$  – плотность вещества,  $\Delta V_i$  – элементарный объем  $i$ -го кусочка) и центр масс такой системы определяется через предел:

$$\vec{R} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M} \int_{V_0} \vec{r} \cdot dm = \frac{1}{M} \int_{V_0} \vec{r} \rho dV, \quad (1.5.3a)$$

где  $M$  – полная масса тела. Интеграл от векторной величины разбивается на интегралы по проекциям на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и каждый из них вычисляется отдельно в пределах объема тела  $V_0$ .

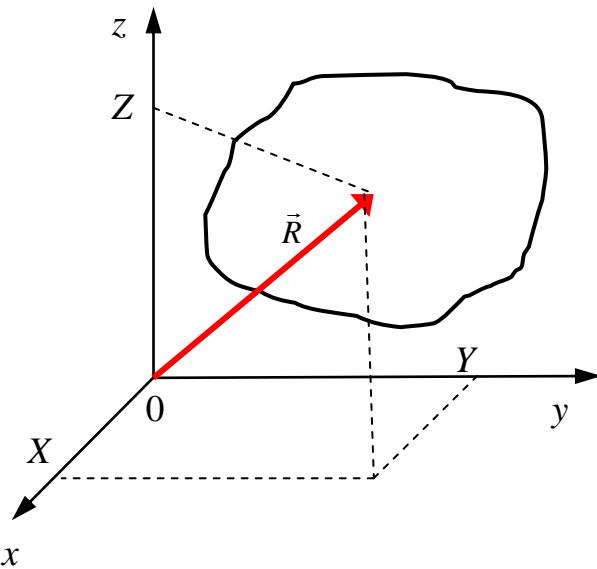
Продифференцируем обе части уравнения (1.5.3) по времени и получим скорость перемещения ЦИ, выраженную через скорости отдельных частиц (массы материальных точек неизменны):

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\vec{P}}{M} \quad (1.5.4)$$

Здесь  $\vec{P}$  – полный импульс системы, т.е. скорость Центра Инерции есть полный импульс системы, деленный на полную массу системы. Отсюда получаем, что Центр Инерции замкнутой системы обладает замечательным свойством: *скорость ЦИ замкнутой системы постоянна* (поскольку полный импульс сохраняется), тогда как отдельные частицы движутся с изменяющимися скоростями. Итак, имеем:

$$\vec{P} = M\vec{V} \quad (1.5.5)$$

Физический смысл соотношения (1.5.5): *полный импульс системы можно рассматривать как импульс одной материальной точки, находящейся в центре инерции системы и имеющей массу, равную сумме масс всех частиц.*



### 1.5.2. Система Центра Инерции.

*Система Центра Инерции* (СЦИ) – это система отсчета, начало координат которой находится в точке центра инерции. Эти системы играют важную роль в механике. В замкнутой системе частиц СЦИ является инерциальной системой отсчета. Переход в СЦИ обычно приводит к упрощению задачи, т.к. при рассмотрении в ней системы частиц скорость центра инерции равна нулю  $\vec{V} = 0$  и, значит, исключается движение частиц как целого, при этом остается только *относительное движение частиц*. В СЦИ становятся ясными свойства внутренних процессов, проходящих в системе частиц.

Пример: атом водорода состоит из протона (масса  $M$ , координата  $\vec{r}_N$ ) и электрона (масса  $m$ , координата  $\vec{r}_e$ ). Координата центра инерции запишем по определению

$$\vec{R} = \frac{M \vec{r}_N + m \vec{r}_e}{M + m} \quad (1.5.6)$$

Перейдем в СЦИ и определим координаты протона и электрона в этой системе отсчета. Получаем следующие координаты ядра и электрона:

$$\vec{r}'_N = \vec{r}_N - \vec{R} = \frac{m}{m + M} (\vec{r}_N - \vec{r}_e), \quad \vec{r}'_e = \vec{r}_e - \vec{R} = \frac{M}{m + M} (\vec{r}_e - \vec{r}_N) \quad (1.5.7)$$

Таким образом, в СЦИ координаты обеих частиц выражаются через вектор  $\vec{r} = (\vec{r}_N - \vec{r}_e)$ , равный относительному расстоянию между электроном и ядром. Атом как целое покоится, а все движение электрона и ядра внутри системы описывается этой относительной координатой.

Итак, для замкнутых систем, состоящих из большого числа частиц, переход в систему центра инерции уменьшает число независимых координат частиц, исключая координаты, определяющие движение системы как целого.