1.6. Основные задачи динамики.

1.6.1. Основное уравнение динамики.

В параграфе 1.2 законы Ньютона были рассмотрены как законы, основанные на экспериментальных измерениях и являющиеся обобщением полученных данных. Во втором законе Ньютона сила и параметры движения (координата, скорость, ускорение) определялись независимо. Однако этот закон можно рассматривать иначе и силу вводить как величину, определяющую скорость изменения импульса, т.е. причину нарушения закона сохранения импульса в неизолированной системе. В самом деле, если система изолирована (замкнута), то имеем:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=0. \tag{1.6.1}$$

Если система не изолирована (или рассматриваем отдельные тела внутри замкнутой системы), то импульс системы (тела) не сохраняется:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}\neq 0 \quad и \quad \vec{P}\neq const. \tag{1.6.2}$$

Функцию координат и скорости материальной точки, определяющую производную ее импульса по времени называют *силой*. Поэтому *основное уравнение динамики* или 2-ой закон Ньютона записывается

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}(\vec{r},\vec{v}) \quad или \quad m\vec{a}=\vec{F}(\vec{r},\vec{v}) \tag{1.6.3}$$

Это векторное уравнение, поэтому на самом деле это три уравнения для трех проекций

$$\frac{dP_x}{dt}=F_x, \quad \frac{dP_y}{dt}=F_y, \quad \frac{dP_z}{dt}=F_z. \tag{1.6.4}$$

Это общее определение силы, однако конкретное содержание эти уравнения получают лишь тогда, когда определена эта функция $\vec{F}(\vec{r},\vec{v})$. Установление таких зависимостей является основной задачей динамики.

В ряде конкретных задач в силу независимости движения по осям x, y, z, могут сохраняться некоторые проекции импульса $\vec{P}$, тогда как для других проекций записываются уравнения типа (1.6.3) и (1.6.4).

Пример 1: Рассмотрим сохранение компоненты импульса по оси x: $dP_x/dt=0$, $P_x=const$. Получаем, что проекция силы на ось x F_x равна нулю, а проекция скорости $v_x = const$. Т.е. если проекция силы равна нулю, то тело сохраняет движение с постоянной скоростью вдоль оси x. Это фактически первый закон Ньютона. Итак, получаем, что 1-ый закон Ньютона является как бы следствием 2-го закона Ньютона. Однако имеет смысл еще раз напомнить, что выделение 1-го закона Ньютона в отдельный закон необходимо, т.к. с его помощью определяется инерциальная система отсчета, т.е. такая система отсчета (ИСО), в которой справедлива запись 2-го закона Ньютона в виде (1.6.3).

Пример 2: Рассмотрим 2 тела в замкнутой системе, при этом полный импульс тел сохраняется:

$$\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=const. \tag{1.6.5}$$

Дифференцируя по времени, мы имеем:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt}=-\frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad или \quad m_1\vec{w}_1=-m_2\vec{w}_2 \tag{1.6.6}$$

Отсюда получаем 3-ий закон Ньютона

$$\vec{F}_1=-\vec{F}_2 \tag{1.6.7}$$

В силу того, что в замкнутой системе $d\vec{P}/dt=0$ получаем важное следствие, что сумма внутренних сил в замкнутой системе равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_{i(\text{int})}=0 \tag{1.6.8}$$

Это условие позволяет нам отделять движение системы тел как целого от внутреннего движения тел относительно центра инерции.

6.2. Основные задачи динамики.

Движение тел определяется вторым законом Ньютона, при этом существует два основных типа задач динамики:

1) Известна зависимость координаты от времени (траектория) $\vec{r}(t)$, и тогда находим силу $\vec{F}$.

2) Известна сила $\vec{F}(\vec{r},\vec{v})$, и тогда находим траекторию частицы $\vec{r}(t)$.

Первая задача решается прямым дифференцированием координаты по времени. Например, зависимость координаты от времени для тела, брошенного со скоростью v_0 под углом α к горизонту равна:

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t\vec{e}_x + \left(v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}\right)\vec{e}_z \qquad (1.6.9)$$

Здесь оси $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_z$ направлены вдоль поверхности и перпендикулярно поверхности Земли соответственно, g – ускорение свободного падения. Дифференцируя (1.6.9) дважды по времени, получаем

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 \cdot \vec{e}_x - mg\,\vec{e}_z = -mg\,\vec{e}_z \qquad (1.6.10)$$

Получаем, как и следовало ожидать, силу тяжести Земли.

Еще пример: изменение координат частицы со временем выражается следующим соотношением:

$$\vec{r}(t) = \alpha t^2 \vec{e}_x + \beta\left(1 - e^{-kt}\right)\vec{e}_y + \gamma\, t\,\vec{e}_z \qquad (1.6.11)$$

где α, β, γ и k – постоянные известные величины. Сила, действующая на тело массы m с такими координатами, равна:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\alpha\, m\vec{e}_x - \beta k^2 m e^{-kt}\vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z = m\left(2\alpha\,\vec{e}_x - \beta k^2 e^{-kt}\,\vec{e}_y\right) \qquad (1.6.12)$$

Действующая сила имеет положительную постоянную составляющую по оси x, и убывающую (по экспоненте) отрицательную составляющую по оси y. Вдоль оси z сила равна нулю.

Вторая задача решается интегрированием, при этом используются начальные условия на положение и скорость частицы. Например, рассмотрим одномерное движение, когда внешняя сила, действующая на тело массы m, зависит от времени действия t и определяется следующим выражением:

$$F(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \qquad (1.6.13)$$

Пусть нас интересует зависимость пути от времени, если в начальный момент времени $t = 0$, координата его равна нулю $x(t=0) = 0$, а скорость $v(t=0) = v_0$. Из уравнения динамики имеем:

$$F(t) = A \cdot e^{-\alpha t} = m\frac{dv}{dt} \qquad (1.6.14)$$

Решаем это уравнение методом разделения переменных: все, что зависит от скорости, переносим в одну сторону уравнения, а все, что зависит от времени, – в другую. Тогда можно взять неопределенный интеграл от обеих частей уравнения и добавить постоянную в одну из сторон уравнения:

$$m\,dv = Ae^{-\alpha t}dt$$

$$m\int dv = A\int e^{-\alpha t}dt + C$$

$$mv = -\frac{A}{\alpha}e^{-\alpha t} + C \qquad (1.6.15)$$

Константа C определяется из начального условия, что в начальный момент времени скорость равна $v(t=0) = v_0$:

$$mv_0 = -\frac{A}{\alpha} + C \quad \text{и} \quad C = mv_0 + \frac{A}{\alpha} \qquad (1.6.16)$$

Далее используем определение скорости и снова разделяем переменные:

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + \frac{A}{\alpha m} - \frac{A}{\alpha m}e^{-\alpha t}$$

$$dx = \left(v_0 + \frac{A}{\alpha m} - \frac{A}{\alpha m} e^{-\alpha t} \right) dt$$

Интегрируем обе части уравнения и добавляем новую константу:

$$x = \int \left(v_0 + \frac{A}{\alpha m} - \frac{A}{\alpha m} e^{-\alpha t} \right) dt + C_1 = \left(v_0 + \frac{A}{\alpha m} \right) t + \frac{A}{\alpha^2 m} e^{-\alpha t} + C_1 \qquad (1.6.17)$$

Константа C_1 определяется из начального условия для координаты $x(t=0)=0$:

$$0 = \frac{A}{\alpha^2 m} + C_1 \qquad \text{и} \qquad C_1 = -\frac{A}{\alpha^2 m} \qquad (1.6.18)$$

Окончательно получаем, что x – ая координата частицы под действием силы (1.6.13) меняется со временем по закону:

$$x = \left(v_0 + \frac{A}{\alpha m} \right) t + \frac{A}{\alpha^2 m} e^{-\alpha t} - \frac{A}{\alpha^2 m} = \left(v_0 + \frac{A}{\alpha m} \right) t + \frac{A}{\alpha^2 m} \left(e^{-\alpha t} - 1 \right) \qquad (1.6.19)$$

Нетрудно привести и разобрать и другие примеры движения частицы под действием силы, зависящей от времени.

Стоит отметить, что чаще в задачах необходимо определять траекторию движения, когда сила зависит от координат или/и скорости движения. В этом случае задача также решается путем интегрирования, но пути решения уравнений динамики могут быть различны для каждой конкретной ситуации.