1.7. Работа и энергия.

1.7.1. <u>Работа силового поля. Мощность</u>.

Если на материальную частицу в каждой точке пространства действует сила, то всю совокупность сил называют *силовым полем*. В общем случае величина силы может меняться при переходе от одной точки пространства к другой и, кроме того, зависеть от времени. Силовое поле можно изображать в виде силовых линий, построенных в пространстве, касательная к которым определяет направление действия силы в данной точке (см рис. 7.1).

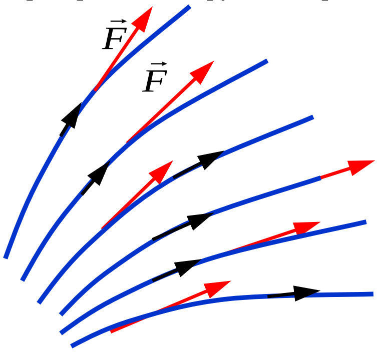

Рис. 7.1.

Рассмотрим движение материальной точки в силовом поле $\vec{F}$ (рис. 7.1). Пусть перемещение в поле сил равно $d\vec{l}$. Тогда *элементарная работа*, совершаемая силой $\vec{F}$, определяется скалярным произведением вектора силы на вектор перемещения:

$$\delta A = F \cdot dl \cdot cos\,\theta = F_l \cdot dl = \left(\vec{F}, d\vec{l}\right)$$

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F_x dl_x + F_y dl_y + F_z dl_z \qquad (1.7.1)$$

где θ – угол между направлением действующей силы и вектором перемещения (рис. 7.2), а F_l – проекция силы на направление перемещения.

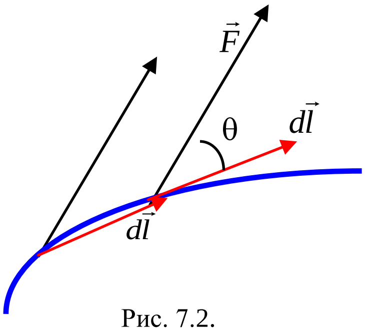

Рис. 7.2.

Работа – скалярная величина. В зависимости от угла между силой и перемещением работа может иметь разные знаки:

$$\left.\begin{array}{ll} \theta < \pi/2 & \delta A > 0 \\ \theta = \pi/2 & \delta A = 0 \\ \theta > \pi/2 & \delta A < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\textit{работа совершена силой} \\ -\textit{работа силой не совершается} \\ -\textit{работа совершена против силы} \end{array}$$

Рассмотрим работу на конечном пути от точки 1 до точки 2 (см траекторию частицы на рис.7.3). Разобьем весь путь L от точки 1 до точки 2 на элементарные перемещения dl, на каждом из которых силу можно считать постоянной. Работа аддитивная величина, т.е. работа на конечном участке пути равна алгебраической сумме работ, совершенных на таких элементарных перемещениях:

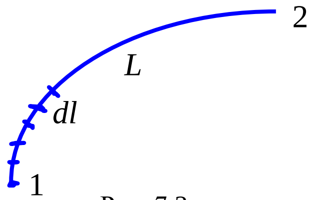

Рис. 7.3.

$$A_{12} = \sum_i \delta A_i = \sum_i \left(\vec{F}_i, d\vec{l}_i\right) = \sum_i F_i dl_i Cos\theta_i \qquad (1.7.2)$$

Устремив к нулю длины перемещений, а их число – к бесконечности, получим предел суммы, который есть не что иное, как интеграл, вычисляемый по пути движения частицы, т.е. иначе, *интеграл по траектории*:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_L F_l dl \qquad (1.7.3)$$

Такой интеграл по траектории еще называют криволинейным интегралом. Итак, работа – криволинейный интеграл вектора $\vec{F}$ вдоль траектории L. Этот интеграл дает по определению работу силы F при перемещении по траектории L.

<u>Графическая иллюстрация</u> представлена на рис. 7.4. На графике отложена проекция силы на направление движения F_l в зависимости от положения частицы на траектории L. Площадка под кривой на расстоянии элементарного перемещения dl равна элементарной работе $\delta A = F_l dl$. Работа на всем участке 1-2 равна площади под всей кривой от точки 1 до точки 2.

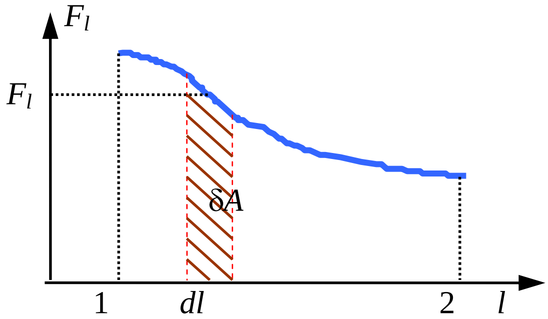

Рис.7.4.

<u>Рассмотрим несколько примеров</u>:

а). Рассмотрим постоянную силу $F = const$. На рис. 7.5 эта сила показана пунктирной линией. Работа постоянной силы A прямо пропорциональна, пройденному расстоянию L (на рис.7.5 – красная линия). Пример такой работы: работа силы тяги против постоянной силы трения.

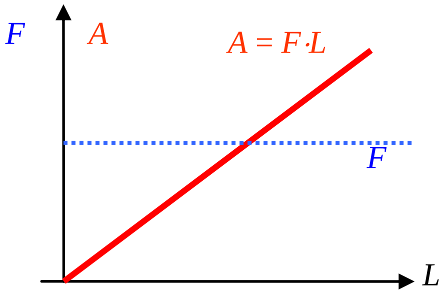

Рис. 7.5.

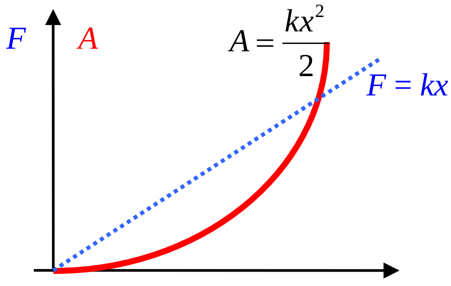

Рис. 7.6.

б). Рассмотрим силу упругости, которая пропорциональна смещению из положения равновесия x:

$$F = - kx,$$

где k – постоянная упругости. Сейчас нас интересует только модуль силы упругости $F = kx$. На рисунке 7.6 она изображается прямо пропорциональной зависимостью от x (пунктирная линия). Полная работа силы упругости определяется интегралом

$$A = \int_0^x kx'\,dx' = \frac{kx^2}{2} \tag{1.7.4}$$

т.е. работа зависит от пути перемещения квадратично (парабола – красная линия на рис. 7.6).

Примечание 1. Элементарная работа δA – это работа силы на бесконечно малом пути, и она не есть полный дифференциал какой-либо функции, поскольку определяется именно переходом из одной точки в другую. Иначе говоря:

$$\delta A \neq d(A) \quad \text{и} \quad \int_1^2 \delta A = A_{12} \neq A_2 - A_1 .$$

Однако, в дальнейшем мы часто будем писать dA вместо δA, подчеркивая бесконечно малую работу и по-прежнему понимая, что для работы интеграл по пройденному пути равен работе на этом пути $\int_1^2 dA = A_{12}$.

Единицы работы:

Система СИ (основные единицы: *м, кг, с*): единица работы $1\ Дж = 1Н \cdot 1м = 1\ кг \cdot м^2/с^2$

Система СГС (основные единицы: *см, г, с*): единица работы $1\ эрг = 1Дн \cdot 1см = 1\ г \cdot см^2/с^2$

Связь между единицами работы: $1Дж = 10^7\ эрг,$

Внесистемные единицы работы: $1\ эВ = 1.602 \cdot 10^{-12}\ эрг,$

$1\ КэВ = 10^3\ эВ,$ $1\ МэВ = 10^6\ эВ,$

$1\ ГэВ = 10^9\ эВ,$ $1\ ТэВ = 10^{12}\ эВ,$

Работа равнодействующей силы равна сумме работ каждой из них. Так, если сила, действующая на тело, может быть представлена в виде суммы двух сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то работа полной силы равна:

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = \left(\vec{F}_1, d\vec{l}\right) + \left(\vec{F}_2, d\vec{l}\right) = dA_1 + dA_2 \tag{1.7.5}$$

Работа, отнесенная к единице времени, – *мощность силы*:

$$W = \frac{dA}{dt} \tag{1.7.6}$$

Единицы мощности обычные: в системе СГС – *Эрг/с*, единица мощности в СИ имеет специальное название Ватт – $1\ Вт = 1\ Дж/с$. Зная мощность, можно получить работу за промежуток времени от t_1 до t_2:

$$dA = W \cdot dt,$$
$$A = \int_{t_1}^{t_2} W(t) \cdot dt \qquad (1.7.7)$$

Весьма полезно выражение мощности через мгновенную скорость тела $\vec{v} = d\vec{r}/dt$:

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F}, d\vec{l})}{dt} = \left(\vec{F}, \frac{d\vec{l}}{dt}\right) \equiv \left(\vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = (\vec{F}, \vec{v}) \qquad (1.7.8)$$

1.7.2. <u>Кинетическая энергия</u>.

Преобразуем выражение для работы, пользуясь основным уравнением динамики (1.6.3) и выражением для элементарного перемещения $d\vec{l} = \vec{v}dt$:

$$A = \int_L (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_L (\vec{F}, \vec{v})dt = \int_L \left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{v}\right)dt = \int_L (\vec{v}, d\vec{p}) \qquad (1.7.9)$$

Скалярное произведение под интегралом можно представить:

$$\vec{v}d\vec{p} = m\vec{v}d\vec{v} = mvdv \qquad (1.7.10)$$

Заметим, что это соотношение (1.7.10) сразу не очевидно, т.к. вектор скорости $\vec{v}$ и вектор ее изменения $d\vec{v}$ находятся под углом друг к другу. Однако из графической иллюстрации (см рис.7.7), где α – угол между вектором скорости и вектором ее изменения, можно увидеть следующее:

$$(\vec{v}, d\vec{v}) = v \cdot |d\vec{v}| Cos\alpha = v \cdot dv$$

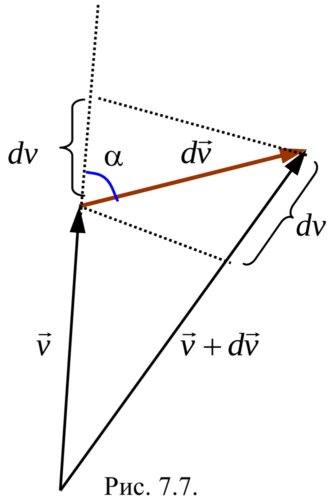

Рис. 7.7.

где dv – элементарное приращение длины вектора скорости, заметим при этом, что $|d\vec{v}| \neq dv$.

Соотношение (1.7.10) получить и другим способом. Продифференцируем обе части очевидного соотношения: $(\vec{v}, \vec{v}) = v^2$ и тогда имеем

$$2(\vec{v}, d\vec{v}) = 2vdv$$

Итак, подставляя (1.7.10) в (1.7.9) и рассматривая работу на конечном участке пути от точки 1 до точки 2, получаем:

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{v}, d\vec{p}) = m\int_1^2 vdv = m\int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad (1.7.11)$$

Введем *кинетическую энергию* как величину характеризующую движение тела в данной системе отсчета:

$$E_{kin} \equiv K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \qquad (1.7.12)$$

Таким образом, из (1.7.11) делаем вывод: работа силы при перемещении материальной точки из положения 1 в 2 равна приращению кинетической энергии этой точки

$$A_{12} = K_2 - K_1 \qquad (1.7.13)$$

Кинетическая энергия аддитивна. Для системы частиц кинетическая энергия всей системы материальных точек равна сумме кинетических энергий отдельных частиц:

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} \qquad (1.7.14)$$

<u>Отметим важный момент</u>: *кинетическая энергия системы определяется работой не только внешних, но и внутренних сил*. Этим кинетическая энергия отличается от импульса, который меняется только за счет внешних сил (внутренние силы не меняют импульса всей системы). <u>Пример</u>: система двух сталкивающихся зарядов (рис. 7.8) – кинетическая энергия системы меняется, а импульс всей системы остается постоянным:

Рис. 7.8.

Можно также записать преобразование кинетической энергии при переходе от одной ИСО к другой:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\vec{v}' + \vec{V}\right)^2 = \frac{mv'^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + m\vec{v}'\cdot\vec{V} = K' + \frac{mV^2}{2} + \vec{p}'\cdot\vec{V} \qquad (1.7.15)$$

Видно из (1.7.15), что *кинетическая энергия не инвариантна* относительно преобразований Галилея.