1.9. Потенциальная энергия. Потенциал поля.

1.9.1. Понятие потенциальной энергии.

Если поле сил (сила, определенная в каждой точке пространства) не зависит от времени, то такое поле сил называется *стационарным*.

Определение: *стационарное силовое поле, в котором работа силы поля на пути между любыми двумя точками не зависит от выбора пути, а только от положения самих этих точек, называется потенциальным полем, а силы – консервативными*.

Верно и обратное, если работа сил на замкнутом пути равна 0, то поле потенциально.

Для потенциального поля можно ввести понятие *потенциальной энергии*. В системе, где действуют консервативные силы, зависящие только от конфигурации (взаимного расположения тел), всякая работа связана с изменением конфигурации. Работа таких сил равна нулю, если все тела в системе вернулись в исходную конфигурацию. Тела, находящиеся в силовых полях, обладают возможностью совершить работу. Так, например, тело, находящееся в поле силы тяжести, или растянутая пружина – обладают определенным запасом работы, которую они могут совершить.

Определение: запас работы, определяемый начальной конфигурацией тел системы, называется *потенциальной энергией системы*.

Запас работы можно отсчитывать от разных конфигураций или разного положения тел.

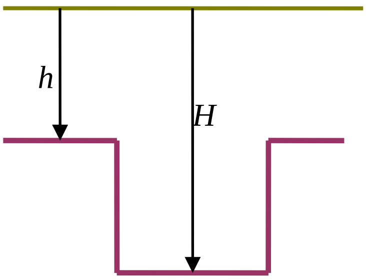

Рис. 9.1.

Пример: тело поднято на высоту h от поверхности земли и на высоту H от дна колодца, тем самым запас работы различен в зависимости от точки отсчета (рис.9.1). Однако при перемещении тела в поле сил изменение запаса работы, равное изменению потенциальной энергии, не зависит от отсчетной конфигурации: просто заменяя одно нулевое положение другим, потенциальная энергия меняется на постоянную величину. Итак, потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной, определяемой точкой отсчета.

Потенциальная энергия может быть, как положительной величиной (> 0), так и отрицательной (< 0). Так, потенциальная энергия взаимодействия двух положительных зарядов, или двух отрицательных зарядов, больше нуля (обычно на бесконечности потенциальная энергия положена равной 0), а потенциальная энергия взаимодействия положительного и отрицательного зарядов – меньше 0.

Работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из положения 1 в положение 2, равна разности (или убыли) потенциальной энергии:

$$A_{12}=U_1-U_2 \tag{1.9.1}$$

Легко увидеть, что работа при переходе из одного положения (1) в другое (2) не зависит от точки отсчета потенциальной энергии. Пусть точка (0) – какое-то начальное положение, от которой производится отсчет потенциальной энергии с неопределенной константой C:

$$A_{12}=A_{10}+A_{02}=A_{10}-A_{20}=(U_1-C)-(U_2+C)=U_1-U_2 \tag{1.9.2}$$

Физический смысл имеет только работа при переходе между рассматриваемыми положениями точки. А из (1.9.2) видно, что начало отсчета потенциальной энергии никоим образом не влияет на работу при переходе из точки (1) в (2). Поэтому говорят, что потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной величины, а работа определяется разностью потенциальных энергий в двух состояниях системы, поэтому постоянная не играет роли.

1.9.2. Примеры потенциальных энергий.

1) *Однородное поле тяжести* (уже рассматривали в §1.8).

$$A_{12}=mgh_1-mgh_2=U_1-U_2 \tag{1.9.3}$$

Потенциальная энергия в однородном поле тяжести

$$U=mgh+C$$

Можно условно положить константу равной 0 (отсчитывать, скажем, от уровня моря), тогда

$$U=mgh \tag{1.9.4}$$

2) *Потенциальная энергия растянутой (сжатой) пружины* (см рис. 9.2). Растянутая или сжатая пружина за счет возвращающей силы совершает колебательное движение около положения равновесия (после того

как отпущена). Такие системы, совершающие колебательные движениями, называются *осцилляторами*. Возвращающая сила растянутой пружины – *сила упругости*, равна:

$$F_{упр} = -k(x - x_0) \qquad (1.9.5).$$

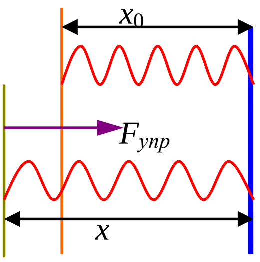

Рис. 9.2.

Здесь x_0 определяет координату недеформированной пружины, а x – координату подвижного конца пружины. Смещение от положения равновесия определяется разностью $\Delta x = x - x_0$. Элементарная работа растяжения на расстояние dx определяется:

$$dA = |F| \cdot |dx| \cdot Cos\theta = -|F| \cdot |dx| \qquad (1.9.6)$$

Знак минус в (1.9.6) появился из-за того, что вектор перемещения и вектор сила направлены в разные стороны (рис. 9.2). Полная работа сил упругости при возвращении пружины в недеформированное состояние равна:

$$A = -\int_{x-x_0}^{0} kl\,dl = \frac{k(x - x_0)^2}{2} = \frac{k\,\Delta x^2}{2} \qquad (1.9.7)$$

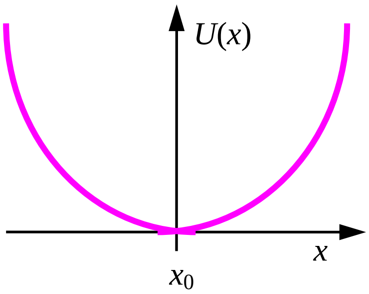

Рис. 9.3.

Эта работа равна убыли потенциальной энергии пружины: $A = U(x) - U(x_0)$. Если энергию недеформированной пружины положить равной 0 (в точке $x = x_0$, см рис. 9.3), то запишем потенциальную энергию упругой силы:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \qquad (1.9.8)$$

Это есть потенциальная энергия растянутой ($x > x_0$) или сжатой ($x < x_0$) пружины. Поскольку под действием такой силы тело совершает колебательное (осцилляционное) движение, то говорят, что (1.9.8) – *потенциальная энергия осциллятора*.

Часто во многих задачах начало отсчета по оси x берется от координаты недеформированной пружины $x_0 = 0$. Тогда координата x определяет отклонение пружины от равновесия.

3) *Потенциальная энергия гравитационного поля*.

Сила притяжения 2-х материальных точек с массами M и m, находящихся на расстоянии r, равна:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\,. \qquad (1.9.9)$$

где G – гравитационная постоянная. Это сила – центральная, консервативная. Для простоты считаем, что масса M покоится, а масса m притягивается к ней и перемещается. Сосчитаем работу по перемещению точки m из бесконечности в точку r_0, отсчитанную от тела массы M:

$$A = -\int_{\infty}^{r_0} G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\,d\vec{r} = G\frac{Mm}{r_0} = U(\infty) - U(r_0) \qquad (1.9.10)$$

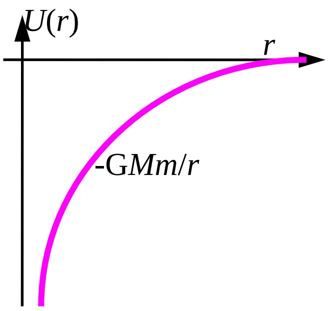

Рис. 9.4.

Выберем начало отсчета потенциальной энергии, считая, что на бесконечности $U(\infty) = 0$ (см рис. 9.4):

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} \qquad (1.9.11)$$

Энергия отрицательна. Это означает, что чтобы развести два этих тела на бесконечность нужно совершить эту работу внешних сил против сил притяжения. Или иначе, модуль этого выражения дает запас гравитационной энергии (работы) на бесконечном расстоянии между телами до их сближения на расстояние r.

Отметим, что такие же соотношения (с точностью до знака) справедливы для кулоновского взаимодействия, при этом потенциальная энергия взаимодействия зарядов q_1 и q_2:

$$U(r) = k\frac{q_1q_2}{r} \qquad (1.9.12)$$

где k – постоянная, зависящая от системы единиц. Знак потенциальной энергии зависит от знаков взаимодействующих зарядов.

1.9.3. Связь между силой и потенциальной энергией (градиент).

Установим связь между потенциальной энергией и силой. По заданным консервативным силам можно найти потенциальную энергию. Нас сейчас интересует обратная задача: пусть имеется силовое поле, характеризуемое потенциальной энергией $U(\vec{r}) = U(x,y,z)$, и требуется найти силу. Интегральная работа определяется соотношением (1.9.1). Запишем в том же ключе элементарную работу как скалярное произведение силы на перемещение

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z,$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – единичные вектора вдоль осей x, y, z (орты). С другой стороны, элементарная работа есть убыль потенциальной энергии:

$$\delta A = U(\vec{r}) - U(\vec{r} + d\vec{r}) = -dU(\vec{r}) = \vec{F}d\vec{r}$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU(\vec{r}) \qquad (1.9.13)$$

Совершим элементарную работу при бесконечно малом перемещении вдоль оси x:

$$F_x dx = U(x,y,z) - U(x+dx,y,z), \qquad (1.9.14)$$

где y и z не меняются. Тогда, разделив на dx, получаем *частную производную* от потенциальной энергии по координате x (частная производная от функции нескольких переменных означает производную по одной из переменных, когда остальные переменные остаются постоянными):

$$F_x = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \qquad (1.9.15)$$

Формально (математически) правильнее поступать, рассматривая перемещение на расстояние Δx, и затем переходить к пределу Δx и оставляя y и z постоянными, получить частную производную:

$$F_x = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x} \equiv -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \qquad (1.9.16)$$

Аналогичные соотношения получим для двух других осей. Итак, проекции силы определяются частными производными по соответствующим координатам:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (1.9.17)$$

Полный вектор силы равен:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right) \qquad (1.9.18)$$

Символически уравнение (1.9.18), если формально вынести потенциальную энергию за скобку, можно записать следующим образом:

$$\vec{F} = -\left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)U(x,y,z) = -\,grad\,U(x,y,z) = -\nabla U(x,y,z) \qquad (1.9.19)$$

При этом мы ввели *оператор градиента*:

$$\nabla \equiv grad \equiv \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \qquad (1.9.20)$$

Примечание 1. Оператором называется то действие, которое нужно совершить с функцией, стоящей справа от оператора. Оператор градиента определяет взятие частных производных от функции, стоящей за оператором справа, и превращает скалярную величину в векторную. В общем смысле, оператором называется правило, по которому функции одного класса переводятся в функции другого класса.

Итак, зная потенциальную энергию поля можно определить силу, действующую в каждой точке пространства. Отметим также, что с точки зрения математики в выражении (1.9.13) стоит полный дифференциал функции – потенциальной энергии, который записывается в виде:

$$dU(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad (1.9.21)$$

Приращение потенциальной энергии представляет собой скалярное произведение вектора силы $\vec{F}$ в виде (1.9.18)-(1.9.19) и вектора перемещения $d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$, взятое со знаком минус.

Физический смысл оператора градиента.

Рассмотрим частную производную от потенциальной энергии по оси x: $\partial U/\partial x$ – это касательная к кривой $U(x)$. Если $\partial U/\partial x > 0$, то сила $F_x = -\partial U/\partial x < 0$ и, следовательно, направлена против направления оси x. Таким образом, сила имеет то направление, в котором потенциальная энергия убывает.

Пусть частные производные по координатам от потенциальной энергии возрастают $\partial U/\partial x > 0$, $\partial U/\partial y > 0$, $\partial U/\partial z > 0$. Тогда градиент потенциальной энергии есть вектор, который складывается из трех направлений возрастания потенциальной энергии по осям x, y, z. По правилам обычного сложения векторов получаем суммарный трехмерный вектор, который указывает направление наиболее быстрого возрастания потенциальной энергии. Сила равна $\vec{F} = -\nabla U$, т.е. направлена в сторону наиболее быстрого убывания потенциальной энергии.

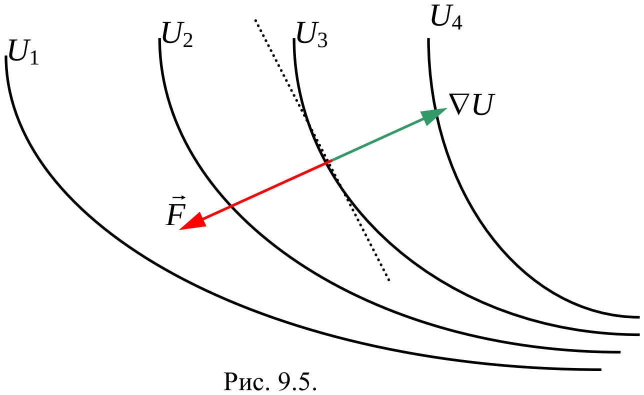

Рис. 9.5.

В точках минимума (и максимума) потенциальной энергии сила равна 0:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Можно построить поверхности равного потенциала, на которых выполняется условие:

$$U(x,y,z) = const \qquad (1.9.22)$$

Такие поверхности носят название *эквипотенциальных поверхностей.* На рисунке 9.5, для примера, приведена серия эквипотенциальных поверхностей. При условии, что

$$U_4 > U_3 > U_2 > U_1,$$

на рисунке 9.5 показано направление векторов градиента и силы. Вектор градиента и, соответственно, вектор силы всегда будут направлены перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям.

1.9.4. Поле и потенциал поля.

Рассмотрим силу тяготения между двумя телами (или кулоновскую силу взаимодействия между двумя зарядами) в векторной форме:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} \qquad \left(\vec{F} = k\frac{qq_0}{r^3}\vec{r}\right) \qquad (1.9.23)$$

Рассмотрим эту силу с точки зрения тела массы m (заряда q). Тогда сила может быть представлена в виде:

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad \left(\vec{F} = q\vec{E}\right) \qquad (1.9.24)$$

где вектор $\vec{g}$ (или $\vec{E}$) характеризует силу, действующую на единицу массы (заряда) и носит название *напряженности поля* сил.

В общем случае сила, действующая на тело, может являться результирующей силой со стороны многих тел (зарядов):

$$\vec{F} = -Gm\sum_i \frac{M_i}{r_i^3}\vec{r}_i \qquad \left(\vec{F} = kq\sum_i \frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i\right) \qquad (1.9.25)$$

При этом все равно можно ввести понятие напряженности поля со следующей интерпретацией: частица массы m (заряда q) находится в поле, создаваемом окружающими телами и характеризуемым вектором напряженности $\vec{g}$ (или $\vec{E}$). Таким образом, для напряженности поля выполняется принцип суперпозиции:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots + \vec{g}_i + \ldots = \sum_i \vec{g}_i \tag{1.9.26}$$

Отметим, что для статических задач (статика рассматривает равновесие тел, которое не меняется со временем), понятие поля – условно и без него вполне можно обойтись. Однако в динамике (процессы, зависящие от времени) – поле является физической реальностью.

Можно ввести потенциал поля (по аналогии с потенциальной энергией):

$$\int_1^2 \vec{g}d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{1.9.27}$$

где потенциал поля определяется как потенциальная энергия частицы единичной массы

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{m} \tag{1.9.28}$$

Гравитационный потенциал равен:

$$\varphi_{гр}(r) = -G\frac{M}{r} \tag{1.9.29}$$

Соответственно потенциал кулоновского поля записывается:

$$\varphi_{кул}(r) = k\frac{q}{r} \tag{1.9.30}$$

Примечание 2. Иногда в физике, особенно в квантовой физике, когда рассматривают конкретную задачу или частицу, под потенциалом понимают потенциальную энергию $U(r)$.

Работу поля можно представить в виде

$$A_{12} = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{1.9.31}$$

Для поля, создаваемого несколькими телами, потенциал равен сумме потенциалов:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i \tag{1.9.32}$$

Связь напряженности и потенциала поля определяется также через градиент аналогично (1.9.19):

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) \tag{1.9.33}$$